
Conversion d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique en un carreau de cyclide de Dupin quartique

version 2.00 du 30/08/2005

Lionel GARNIER — Sebti FOUFOU — Marc NEVEU

Laboratoire LE2i - Informatique,
Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex
<l garnier,sfoufou,mneveu>@u-bourgogne.fr

RÉSUMÉ. Les cyclides de Dupin, inventées en 1822 par le mathématicien français P. Ch. Dupin, sont des surfaces algébriques de degré 3 ou 4. Les propriétés géométriques de ces surfaces ont favorisé un intérêt grandissant quant à leur utilisation en modélisation géométrique. Quelques algorithmes de conversion de carreaux de cyclides de Dupin quartiques en carreaux de Bézier rationnels biquadratiques ont déjà été développés. Dans cet article, nous considérons le problème inverse : nous étudions les conditions de convertibilité d'un carreau de Bézier en carreau de cyclide de Dupin et nous présentons un algorithme de conversion pour calculer les paramètres d'une cyclide de Dupin porteuse ainsi que les bords d'un carreau de celle-ci, représentant un carreau de Bézier. Cette conversion permet d'éliminer le manque de flexibilité dont souffrent les cyclides de Dupin au niveau du contrôle de forme, de faire bénéficier ces surfaces de tous les outils de modélisation disponibles pour les surfaces de Bézier et donc de les rapprocher encore plus du monde de la modélisation surfacique.

ABSTRACT. Dupin cyclides were introduced in 1822 by the French mathematician Pierre-Charles Dupin. They are algebraic surfaces of degree 3 or 4. The set of geometric properties of these surfaces has encouraged an increasing interest in using them for geometric modeling. A couple of algorithmes is already developed to convert a Dupin cyclide patch into a rational biquadratic Bézier patch. In this paper, we consider the inverse problem: we investigate the conditions of convertibility of a Bézier patch into a Dupin cyclide one, and we present a conversion algorithm to compute the parameters of a Dupin cyclide with the boundary of the patch that corresponds to the given Bézier patch. This conversion eliminates the lack of flexibility that handicaps the control and adjustment of the form of Dupin cyclides, lets them have the advantages of all the tools available for Bézier surfaces, and then gets them more closer to the world of surface modeling.

MOTS-CLÉS : cyclide de Dupin, courbes et surfaces de Bézier Rationnelles de degré 2, conversion

KEYWORDS: Dupin cyclide, rational Bézier curves and patches of degree 2, conversion

1. Introduction

En CAO, les objets sont souvent représentés par des surfaces paramétriques de type Bézier, Bspline, NURBS, etc. Cette représentation convient très bien aux tâches de design et de rendu qui sont très courantes dans un système de CAO, mais certaines opérations très importantes sont difficiles à réaliser sur les surfaces paramétriques (vérifier l'appartenance d'un point $P(x, y, z)$ à la surface, calculer l'intersection de deux ou plusieurs surfaces paramétriques, etc.). A leur tour les surfaces implicites de faible degré (les plans et les quadriques : cône, cylindre, sphère) conviennent mieux à des tâches comme la classification de points et permettent des calculs géométriques rapides et robustes. L'utilisation des surfaces implicites de degré plus élevé est cependant très difficile voire impossible, vu les difficultés qu'on peut avoir pour contrôler la forme de telles surfaces. Une surface possédant les avantages des deux représentations constitue certainement un outil de modélisation très puissant, malheureusement la conversion entre les deux représentations n'est pas la bonne solution : convertir une surface implicite quelconque en une surface paramétrique n'est pas toujours possible. La conversion des surfaces paramétriques en implicites produit des degrés très élevés (la surface implicite qui résulte de l'implicitisation d'une Bézier de degré 4 est de degré 32).

Le mathématicien français Charles-Pierre Dupin a introduit au début du 19^e siècle des surfaces non sphériques ayant des lignes de courbure circulaires et possédant à la fois une représentation paramétrique et une représentation implicite. Dans son livre, *Applications de la Géométrie*, publié à Paris en 1822 [DUP 22], il a appelé ces surfaces les cyclides. Les cyclides de Dupin (CdD) font partie de la famille des cyclides qui sont des surfaces plus générales possédant la particularité de contenir le cercle à l'infini comme ligne double [DAR 87, DAR 17]. Au début du 19^e siècle, ces surfaces ont été rencontrées en premier par M. Moutard dans son étude des surfaces anallagmatiques [MOU 04]. Durant le reste de ce siècle et le début du 20^e siècle, les propriétés mathématiques des CdD ont été étudiées par d'autres mathématiciens [MAX 68, FOR 68]. Le fait de posséder un faible degré algébrique et une représentation paramétrique simple confère aux CdD à la fois les avantages de la représentation implicite et les avantages de la représentation paramétrique. Avoir un faible degré algébrique permet la mise en place d'algorithmes robustes et relativement rapides pour les calculs géométriques (appartenance d'un point à la surface, dérivées, tangentes). Avoir une représentation paramétrique permet une édition et une visualisation plus rapides de ces surfaces. En fonction du degré, nous distinguons deux types de CdD cubiques (de degré 3) et CdD quartiques (de degré 4). Dans cet article, nous n'utilisons que les CdD quartiques.

Récemment, les cyclides de Dupin (CdD) sont à nouveau explorées pour être utilisées en modélisation géométrique [GAR 04]. Le premier qui a pensé à cette utilisation fut R. Martin, dans sa thèse, en 1982 [MAR 82]. Les propriétés des cyclides ont par la suite été beaucoup étudiées [BER 92, BER 78, HEB 81, PIN 85, BAN 70, CHA 89], ce qui a permis de montrer l'adéquation et l'apport de ces surfaces pour la modélisation géométrique [PRA 90, DUT 93, AUM 95]. Parmi les nombreuses uti-

lisations des CdD nous citons : la jointure et le raccordement de surfaces [PAL 98, PRA 90, PRA 95, BOE 90, SHE 00, FOU 04] ; l'interpolation et la reconstruction 3D [GAL 94] ; la modélisation et la composition de surfaces [SRI 96] ; le planning et le contrôle du mouvement [SRI 95]. Pour remédier au fait que les CdD ne permettent pas de réaliser des jointures avec des primitives elliptiques, Mike Pratt a proposé les supercyclides comme extension des CdD. Une supercyclide est l'image d'une CdD par une application projective [PRA 97, PRA 94]. M. Degen a également généralisé les surfaces de Blutel pour obtenir les surfaces doubles de Blutel qui contiennent les supercyclides [DEG 86, DEG 98].

Afin de faciliter l'introduction des CdD dans les systèmes de modélisation géométrique, qui sont basés sur les surfaces paramétriques (Bézier, Bspline, NURBS), plusieurs algorithmes ont été proposés pour la conversion des CdD en carreaux de Bézier¹ [PRA 90, ALB 96, UED 95, FOU 05] ou en carreaux de NURBS [ZHO 92]. La conversion en carreaux de Bézier a particulièrement été facilitée, par le fait que les courbes isoparamétriques tracées sur un carreau de Bézier sont des coniques, ainsi que par la forme des lignes de courbure des CdD, qui sont des cercles et donc des coniques particulières. L'algorithme de conversion proposé par M. Pratt [PRA 90] utilise des concepts trigonométriques et les expressions rationnelles des fonctions cos et sin. L'algorithme de G. Albrecht [ALB 96] combine l'utilisation d'une inversion et une cyclide de base de type horned. Dans [UED 95], l'auteur élabore un ensemble de propriétés des carreaux de Bézier et propose un algorithme de conversion basé sur ces propriétés. Dans [FOU 05], une amélioration de l'algorithme de Pratt et un nouvel algorithme de conversion basé sur les propriétés barycentriques des carreaux de Bézier ont été proposés.

Dans cet article, nous considérons le problème inverse : nous étudions les conditions de convertibilité d'un carreau de Bézier en un carreau de CdD et nous présentons un algorithme de conversion pour calculer les paramètres d'une CdD porteuse ainsi que les bords $\theta_0, \theta_1, \psi_0$ et ψ_1 d'un carreau de celle-ci représentant un carreau de Bézier. Lors d'une opération de modélisation, le déplacement des pôles permet de contrôler et d'ajuster facilement la forme d'une surface paramétrique (à pôles) afin d'obtenir une meilleure approximation de la forme souhaitée. L'ajustement des surfaces algébriques est par contre beaucoup moins intuitif ; la modification des paramètres change bien la forme de la surface globalement, mais il est difficile de contrôler la forme ou les points de passage d'un carreau particulier. Dans le cas des CdD, il n'est pas pratique de contrôler la forme d'un carreau délimité par quatre lignes de courbure situées à $\theta_0, \theta_1, \psi_0$ et ψ_1 en changeant les valeurs des trois paramètres de l'équation paramétrique. La conversion que nous avons établie entre les Bézier et les CdD permet d'éliminer ce manque de flexibilité dont souffrent les CdD au niveau de contrôle de forme et de faire bénéficier ces surfaces de tous les outils de modélisation disponibles pour les surfaces de Bézier et donc de les rapprocher encore plus du monde

1. Seuls les carreaux de Bézier rationnels biquadratiques sont considérés dans ce travail, pour alléger le texte, ils seront référencés par carreaux de Bézier. Pareillement les courbes de Bézier rationnelles quadratiques seront référencées par courbes de Bézier.

de la modélisation surfacique. En effet, il suffit de construire des carreaux de Bézier convertibles, de les manipuler, de les ajuster en tant que tels et de les convertir en CdD pour les sauvegarder (le stockage d'une Bézier est 6,4 fois plus chère que le stockage d'une CdD : un carreau de CdD est défini par 7 flottants alors qu'un carreau de Bézier est défini par 45 flottants) ou pour faire des opérations plus complexes telles que le calcul des intersections ou la vérification d'appartenance d'un point $P(x, y, z)$ à la surface modélisée. Ainsi, cette conversion complètera le pont déjà existant, mais à sens unique, reliant les CdD aux surfaces de Bézier.

Le reste de l'article est organisé comme suit : nous rappelons dans la partie 2.1 les définitions des courbes et surfaces de Bézier rationnelles quadratiques. Nous utiliserons les courbes de Bézier pour modéliser les cercles principaux qui permettent de définir les CdD, nous rappelons donc dans la partie 2.2 comment modéliser un arc de cercle par une courbe de Bézier. Nous montrons par la suite dans la partie 2.3 comment tracer des courbes isoparamétriques circulaires sur les carreaux de Bézier. La définition des CdD, leur propriétés les plus utiles pour ce travail ainsi que la conversion des carreaux de CdD en carreaux de Bézier sont présentées dans la partie 3. La partie 4 donne les conditions de convertibilité d'un carreau de Bézier en un carreau de CdD et présente l'algorithme de conversion que nous avons développé. La conclusion et les perspectives sont données dans la partie 5.

2. Courbes et surfaces rationnelles quadratiques de Bézier

2.1. Rappels

Les courbes de Bézier sont des courbes paramétriques définies à partir des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1 - t)^2 \quad B_1(t) = 2t(1 - t) \quad B_2(t) = t^2 \quad (1)$$

Un point $M(t)$ appartient à la courbe de Bézier, définie par les points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et les poids $(w_i)_{0 \leq i \leq 2}$, avec $\sum_{i=0}^2 w_i \neq 0$, si et seulement si, pour un point quelconque O de \mathcal{E} , l'espace affine euclidien de dimension 3 muni du produit scalaire usuel, le point $M(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\forall t \in [0; 1], \overrightarrow{OM(t)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i(t)} \sum_{i=0}^2 w_i B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \quad (2)$$

Si nous avons $w_0 = w_2 = 1$, la courbe est dite sous forme quasi-standard. Si de plus, $w_1 = w > 0$, la courbe est dite sous forme standard. La comparaison de $|w_1|$ avec 1 permet alors de déterminer le type de la conique [DEM 98].

Les notations ci-après seront utilisées dans la suite de ce papier pour désigner des courbes de Bézier :

- $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$ désigne une courbe de Bézier de points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 .
- $RQBC \{(P_0; P_1; P_2), w\}$ désigne une courbe de Bézier quasi-standard de points de contrôle $(P_0; 1)$, $(P_1; w)$ et $(P_2; 1)$.
- $RQBC \{(P_0; P_1; P_2), (w_0; w_1; w_2)\}$ désigne une courbe de Bézier de points de contrôle $(P_0; w_0)$, $(P_1; w_1)$ et $(P_2; w_2)$.

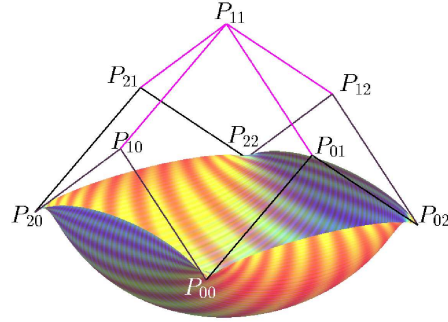


Figure 1. Un carreau de Bézier avec son polyèdre de contrôle.

Les carreaux rationnels biquadratiques de Bézier sont des surfaces définies comme produit tensoriel de courbes de Bézier. Un point $M(u, v)$ appartient au carreau de Bézier de points de contrôle $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ et de poids $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ si et seulement si, pour un point quelconque O de \mathcal{E} , le point $M(u, v)$ vérifie l'équation suivante [PRA 90, HOS 93] :

$$\overrightarrow{OM(u, v)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{ij} B_i(u) B_j(v)} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{ij} B_i(u) B_j(v) \overrightarrow{OP_{ij}} \quad (3)$$

où $(u, v) \in [0; 1]^2$. La figure 1 montre un carreau de Bézier rationnel biquadratique avec son polyèdre de contrôle.

2.2. Représentation d'arcs de cercles par des courbes de Bézier

Comme tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie de ce cercle, nous obtenons une condition nécessaire (non suffisante) pour qu'une $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$ soit un arc de cercle $\gamma : P_0 P_1 = P_1 P_2$ c'est-à-dire que P_1 appartient à Π_1 , plan médiateur de $[P_0 P_2]$. P_1 appartient aussi à Π_2 , plan contenant la $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$, figure 2.

La modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier, figure 3, a déjà été présentée par plusieurs personnes et les travaux ont été focalisés sur le calcul du poids

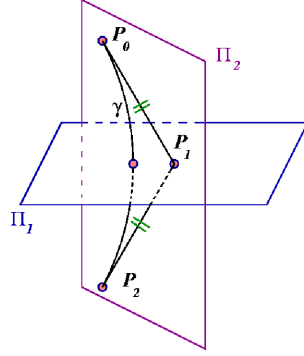


Figure 2. Condition spatiale du point P_1 lors de la modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier.

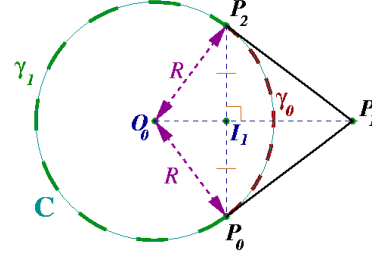


Figure 3. Modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier.

de courbes sous forme standard [HOS 93, FAR 99, FIO 92]. Nous rappelons donc les formules liant le centre O_0 de l'arc de cercle $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$, de rayon $R = O_0P_0$, avec les point P_1 et I_1 , milieu du segment $[P_0P_2]$:

$$\overrightarrow{P_1O_0} = t_0 \overrightarrow{P_1I_1} \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}^2}{I_1P_1 \bullet P_0P_1} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1} \quad \text{avec} \quad t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_0}}{O_0P_0 \bullet O_0I_1} \quad (5)$$

où $\vec{u} \bullet \vec{v}$ désigne le produit scalaire entre les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Les démonstrations de ces formules sont disponibles dans [GAR 04].

Le théorème 1, dont la démonstration est également détaillée dans [GAR 04], donne les conditions sur les poids w_0 , w_1 et w_2 pour qu'une courbe de Bézier, de points de contrôle pondérés $(P_0; w_0)$, $(P_1; w_1)$ et $(P_2; w_2)$, figure 3, modélise un arc de cercle.

Théorème 1 : Arc de cercle déterminé par deux points et les tangentes en ces points

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangentes (P_0P_1) et (P_2P_1) , les points P_0 , P_1 et P_2 n'étant pas alignés mais vérifiant la contrainte : $P_0P_1 = P_2P_1$.

Soit $\gamma = RQBC \{(P_0; P_1; P_2), (w_0; w_1; w_2)\}$ avec : $(w_0; w_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$. On pose $w = w_0 + w_2$ et $G = \text{bar} \{(P_0; w_0); (P_2; w_2)\}$. (bar désigne le barycentre).

Alors, γ est un arc de cercle de centre O et de rayon R si et seulement si le point $\gamma(\frac{1}{2})$ appartient au cercle de centre O et de rayon R si et seulement si :

$$O\gamma(\frac{1}{2}) = \left\| \overrightarrow{O\gamma(\frac{1}{2})} \right\| = R$$

condition équivalente à :

$$(w + 2w_1)^2 \left\| \overrightarrow{O_0\gamma(\frac{1}{2})} \right\|^2 = (w\overrightarrow{O_0G} + 2w_1\overrightarrow{O_0P_1})^2 \quad (6)$$

elle-même équivalente à l'équation :

$$\alpha w_1^2 + \beta = 0 \quad (7)$$

où α et β sont donnés par :

$$\alpha = 4(O_0P_1^2 - R^2), \beta = 2w_2(\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0P_2} - R^2) \quad (8)$$

La solution positive w_1^+ (resp. négative w_1^-) des solutions de la formule (9) permet de modéliser le petit (resp. grand) arc de cercle du cercle \mathcal{C} .

$$w_1^+ = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad w_1^- = -\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \quad (9)$$

■

Lorsque la courbe de Bézier est sous forme quasi-standard, le calcul du poids est beaucoup plus simple et nous rappelons seulement les formules :

$$w_1^+ = \frac{O_0I_1 - O_0P_0}{O_0P_0 - O_0P_1} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{P_0P_1 \times P_0P_2} = f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \quad (10)$$

$$w_1^- = -\frac{O_0I_1 + O_0P_0}{O_0P_0 + O_0P_1} = -\frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{P_0P_1 \times P_0P_2} = -f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \quad (11)$$

2.3. Circularité des courbes isoparamétriques de Bézier

Le théorème 2 (voir [GAR 04] pour la démonstration) montre comment construire les deux courbes isoparamétriques passant par le point $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le corollaire 1, déduit de ce même théorème, donne les conditions pour que ces deux courbes soient des arcs de cercle. La conversion d'un carreau de Bézier en CdD n'est possible que si le carreau est délimité par quatre arcs de cercles et si ces deux courbes isoparamétriques sont aussi des arcs de cercles, d'où l'importance de ce théorème pour l'algorithme de conversion.

Théorème 2 : *Courbe de Bézier sur un carreau de Bézier*

Soit $(P_{ij}; w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$, les points de contrôle pondérés d'un carreau de Bézier.

Soient $G_i^u = \text{bar} \{(P_{i0}; w_{i0}), (P_{i1}; 2w_{i1}), (P_{i2}; w_{i2})\}$ et $\alpha_i^u = w_{i0} + 2w_{i1} + w_{i2}$ et $G_i^v = \text{bar} \{(P_{0i}; w_{0i}), (P_{1i}; 2w_{1i}), (P_{2i}; w_{2i})\}$ et $\alpha_i^v = w_{0i} + 2w_{1i} + w_{2i}$. Alors :

- si $\sum_{i=0}^2 \alpha_i^u \neq 0$, la courbe déterminée par le chemin $u \mapsto M(u, \frac{1}{2})$ est une courbe de Bézier de points de contrôle pondérés $(G_i^u; \alpha_i^u)$.
- si $\sum_{i=0}^2 \alpha_i^v \neq 0$, la courbe déterminée par le chemin $v \mapsto M(\frac{1}{2}, v)$ est une courbe de Bézier de points de contrôle pondérés $(G_i^v; \alpha_i^v)$.

■

Corollaire 1 : *Condition nécessaire pour qu'une courbe de Bézier sur un carreau de Bézier soit un arc de cercle*

D'après le théorème 1, les courbes $u \mapsto M(u, \frac{1}{2})$ et $v \mapsto M(\frac{1}{2}, v)$ sont des arcs de cercles si et seulement si l'on a les deux conditions suivantes :

- G_1^u (resp. G_1^v) appartient au plan médiateur de $[G_0^u G_2^u]$ (resp. $[G_0^v G_2^v]$).
- Les poids $(\alpha_i^u)_{0 \leq i \leq 2}$ et $(\alpha_i^v)_{0 \leq i \leq 2}$ vérifient le théorème 1.

3. Les cyclides de Dupin

Dans cette section nous rappelons la définition des CdD et nous donnons les propriétés (lignes de courbure et cercles principaux) qui vont nous servir dans les paragraphes suivants. Nous présentons par la suite le principe de la conversion d'un carreau de CdD en un carreau de Bézier en nous focalisant sur l'algorithme de K. Ueda qui donne les propriétés d'un carreau de Bézier obtenu par conversion d'un carreau de CdD. Les carreaux de Bézier convertibles que nous allons construire dans la section 4 doivent vérifier ces propriétés d'où leur importance pour notre travail.

3.1. Equations et propriétés des CdD

Une CdD est caractérisée par trois paramètres réels a , c et μ que l'on ait $c^2 < a^2$. Afin de simplifier les équations, nous poserons $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Il existe un repère $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ de \mathcal{E} , appelé repère de la cyclide, O étant le centre de la cyclide, tel que celle-ci soit définie par l'équation paramétrique suivante :

$$\Gamma_d(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{pmatrix} \quad (12)$$

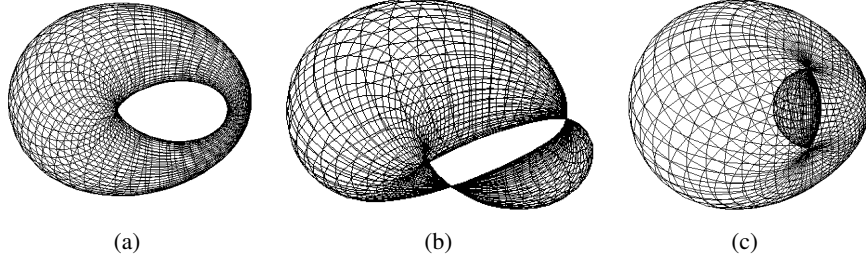


Figure 4. Les trois types des cyclides. (a) ring ou en anneau $0 \leq |c| \leq |\mu| \leq |a|$. (b) horned ou à croissant externe $0 < |\mu| \leq |c| < |a|$. (c) spindle ou à croissant interne $0 \leq |c| \leq |a| < |\mu|$.

où $\theta \in [0; 2\pi]$ et $\psi \in [0; 2\pi]$. Selon les valeurs respectives de a , c et μ , il existe trois types de cyclides : ring, spindle et horned [FOR 12, PRA 90]. La figure 4 montre trois exemples de CdD.

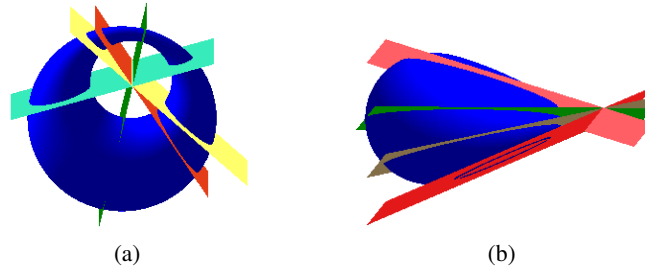


Figure 5. Intersections communes des plans contenant les cercles de courbure d'une cyclide. Dans la figure (a) θ est constant, alors que dans (b) c'est ψ qui est constant.

Une ligne de courbure d'une surface S est l'une des deux courbes orthogonales de S correspondant à la plus petite ou à la plus grande variation de la pente de S . Ces lignes de courbure peuvent être déterminées à partir de deux formes quadratiques fondamentales dont les coefficients sont calculés à partir des dérivées premières et secondes de la nappe paramétrée donnant l'équation paramétrique de S [BER 92, LEL 91, TAU 00, REI 97].

Dans ce travail, les lignes de courbures des CdD sont utilisées pour délimiter les carreaux à convertir ou resultants de la conversion. Ces lignes sont des cercles et sont obtenues avec soit θ soit ψ constant. Pour un nombre θ_0 fixé, les deux cercles de courbure, définis par les chemins : $\psi \mapsto \Gamma_d(\theta_0, \psi)$ et $\psi \mapsto \Gamma_d(\theta_0 + \pi, \psi)$, se situent dans le plan d'équation :

$$a \sin(\theta_0) x - b \cos(\theta_0) y = \mu c \sin(\theta_0) \quad (13)$$

La droite Δ_{θ_0} , intersection des plans d'équation $(x = \frac{c\mu}{a})$ et $(y = 0)$, est commune à tous ces plans (lorsque l'on fait varier θ_0), figure 5.(a).

Pour un nombre ψ_0 fixé, les deux cercles de courbure, définis par les deux chemins : $\theta \mapsto \Gamma_d(\theta, \psi_0)$ et $\theta \mapsto \Gamma_d(\theta, \pi - \psi_0)$, se situent dans le plan d'équation :

$$c \sin(\psi_0) x - bz = \mu a \sin(\psi_0) \quad (14)$$

La droite Δ_{ψ_0} , intersection des plans d'équation $(x = \frac{a\mu}{c})$ et $(z = 0)$ est commune à tous ces plans (lorsque l'on fait varier ψ_0), figure 5.(b).

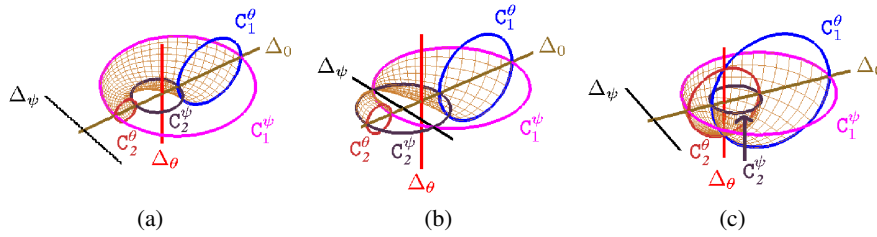


Figure 6. Cercles principaux d'une cyclide de Dupin de type ring (a), de type horned (b) et de type spindle (c).

Une cyclide admet deux plans de symétrie, orthogonaux entre eux, $\mathcal{P}_y(y = 0)$ et $\mathcal{P}_z(z = 0)$, figure 6. L'intersection de la cyclide avec un de ces plans est l'union de deux cercles, chaque cercle étant appelé cercle principal. Lorsque l'on connaît le type de la cyclide, la donnée de deux cercles principaux coplanaires permet de déterminer les trois paramètres de la cyclide. La figure 6 illustre les quatre cercles principaux d'une cyclide ainsi que les droites Δ_θ , Δ_ψ et Δ_0 , cette dernière étant la perpendiculaire commune à Δ_θ et Δ_ψ . Le plan \mathcal{P}_y (resp. \mathcal{P}_z) est engendré par les deux droites Δ_θ et Δ_0 (resp. Δ_ψ et Δ_0). Les cercles principaux dans le plan \mathcal{P}_y (resp. \mathcal{P}_z) sont C_1^θ et C_2^θ (resp. C_1^ψ et C_2^ψ). \vec{j}_0 est un vecteur directeur unitaire de Δ_ψ et \vec{k}_0 est un vecteur directeur unitaire de Δ_θ .

Afin de soulager les notations, les cercles principaux seront notés C_1 et C_2 sachant que pour $i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, dans le plan \mathcal{P}_y (resp. \mathcal{P}_z), C_i correspond à C_i^θ (resp. C_i^ψ).

3.2. Caractérisation d'une cyclide en fonction de ses cercles de courbure

Si les cercles opposés ne sont pas sécants, nous obtenons une cyclide de type ring, figure 7.(a). Δ_θ est alors la droite qui coupe les deux disques délimités par deux des quatre cercles. Dans le cas contraire, on note Δ la droite définie par l'intersection des deux cercles sécants. Si Δ ne coupe pas les disques définis par les deux autres cercles, la cyclide est de type horned et \vec{j}_0 est un vecteur directeur de $\Delta = \Delta_\psi$. Sinon, elle est de type spindle, figure 7.(b), et \vec{k}_0 est un vecteur directeur de $\Delta = \Delta_\theta$. Il suffit de connaître l'une des deux droites pour connaître l'autre droite.

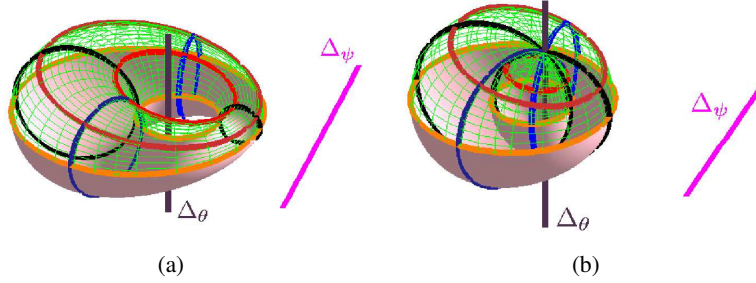


Figure 7. Cercles de courbure obtenus pour une cyclide de type ring (a) et de type spindle (b).

Cette caractérisation est très importante pour notre algorithme de conversion de carreaux de Bézier en carreaux de CdD. En effet, l'étude de certains cercles sur le carreau de Bézier permet de déterminer le type de la CdD résultant de la conversion.

3.3. Conversion d'un carreau de CdD en un carreau de Bézier

Le carreau de CdD à convertir doit être délimité par quatre lignes de courbure qui sont des cercles représentés par les courbes γ_{θ_0} , γ_{θ_1} , γ_{ψ_0} et γ_{ψ_1} suivants :

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta_0} : \psi &\longmapsto \Gamma_d(\theta_0, \psi) & \gamma_{\theta_1} : \psi &\longmapsto \Gamma_d(\theta_1, \psi) \\ \gamma_{\psi_0} : \theta &\longmapsto \Gamma_d(\theta, \psi_0) & \gamma_{\psi_1} : \theta &\longmapsto \Gamma_d(\theta, \psi_1) \end{aligned} \quad (15)$$

La figure 8.(a) montre une CdD, de paramètres $a = 40$, $c = 5$ et $\mu = 10$, découpée en quatre différents carreaux séparés par les lignes de courbure obtenues avec les valeurs $\theta_0 = -\frac{3\pi}{4}$, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\psi_0 = -\frac{11\pi}{13}$ et $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$. Nous avons utilisé l'algorithme de conversion de Mike Pratt [PRA 90] pour déterminer le carreau de Bézier représentant le carreau S_0 de la CdD. La figure 8.(b) montre le résultat obtenu. Les points de contrôle et les poids sont donnés dans le tableau 1.

Dans notre algorithme de conversion de carreaux de Bézier en CdD, que nous présentons dans la section 4.3, nous utilisons un ensemble de propriétés établies par K. Ueda pour son algorithme de conversion de CdD en Bézier [UED 95]. Nous détaillons donc cet algorithme afin de montrer ces propriétés. K. Ueda écrit l'équation paramétrique de la cyclide sous la forme donnée par De Pont [PON 84, MAR 86] et obtient ainsi comme domaine paramétrique le pavé $[0; 1]^2$. Après quelques calculs sur les polynômes, les points de contrôle du carreau de Bézier sont obtenus en résolvant des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues et chaque poids est obtenu par le calcul d'un déterminant 2×2 .

Ainsi, K. Ueda rappelle, à partir des propriétés des carreaux principaux [MAR 84, NUT 88], que les courbes coordonnées sont orthogonales entre elles à chaque sommet

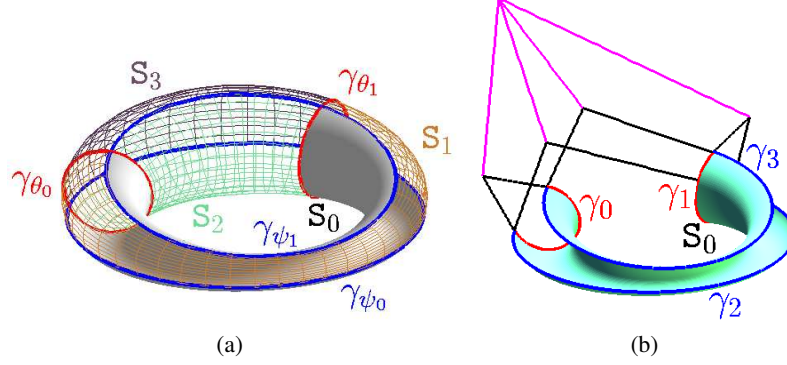


Figure 8. Conversion d'un carreau de CdD en un carreau de Bézier. La figure (a) montre quatre le découpage de la CdD en quatre carreaux délimités par quatre lignes de courbure. La figure (b) montre un carreau de Bézier, représentant le carreau S_0 de la CdD de la figure (a).

Points de contrôle	Poids
$P_{00} \simeq (-35,643 ; -37,185 ; 6,771)$	$w_{00} \simeq 4395,871$
$P_{01} \simeq (-44,846 ; -46,461 ; -15,729)$	$w_{01} \simeq 712,933$
$P_{02} \simeq (-26,592 ; -28,062 ; -13,429)$	$w_{02} \simeq 546,274$
$P_{10} \simeq (-94,296 ; 12,678 ; 10,201)$	$w_{10} \simeq 1821,510$
$P_{11} \simeq (-135,423 ; 18,136 ; -27,141)$	$w_{11} \simeq 258,040$
$P_{12} \simeq (-62,877 ; 8,509 ; -18,001)$	$w_{12} \simeq 254,523$
$P_{20} \simeq (-24,204 ; 44,437 ; 6,101)$	$w_{20} \simeq 2639,081$
$P_{21} \simeq (-29,788 ; 54,185 ; -13,832)$	$w_{21} \simeq 438,574$
$P_{22} \simeq (-18,438 ; 34,369 ; -12,402)$	$w_{22} \simeq 320,000$

Tableau 1. Points de contrôle et poids d'un carreau de Bézier obtenu par conversion d'un carreau de cyclide en utilisant l'algorithme de Mike Pratt.

du carreau (PG3) et que les quatre sommets du carreau sont cocycliques (PG1) et il ajoute que trois poids des sommets peuvent être égaux à 1 (et même les quatre si les quatre sommets forment un rectangle); le quatrième poids, qui ne dépend que de la position spatiale des quatre sommets, est $w_{22} = 1 - pq$ où :

$$p = \frac{\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3) \times (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 - (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)} \quad q = \frac{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_4 - (\vec{e}_4 \bullet \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}{\vec{e}_4 \bullet \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_4) \times (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)} \quad (16)$$

avec :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{P_{00}P_{20}} \overrightarrow{P_{00}P_{20}}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{P_{00}P_{02}} \overrightarrow{P_{00}P_{02}}, \quad (17)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{P_{02}P_{22}} \overrightarrow{P_{02}P_{22}}, \quad \vec{e}_4 = \frac{1}{P_{20}P_{22}} \overrightarrow{P_{20}P_{22}} \quad (18)$$

Il rappelle aussi que le point central P_{11} est le point d'intersection aux quatre plans tangents au carreau de Bézier à chaque sommet (PG4), propriété déjà citée par Pratt [PRA 93] et Degen [DEG 94].

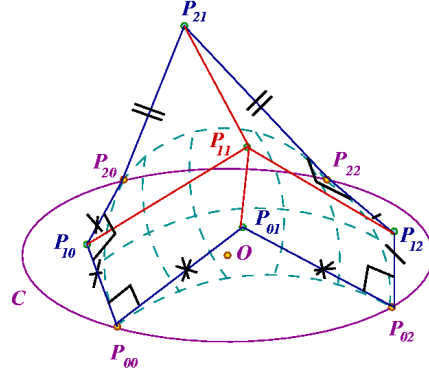


Figure 9. Propriétés géométriques des points de contrôle d'un carreau de Bézier obtenu par conversion d'un carreau de cyclide.

La deuxième propriété géométrique (PG2) provient des lignes de courbure circulaires car le point de contrôle intermédiaire de chaque courbe de Bézier de bordure doit appartenir au plan médiateur des deux extrémités.

Notons $Aff\{A; B; C\}$ l'espace affine engendré par les points A, B et C . Le tableau 2 et la figure 9 récapitulent les propriétés géométriques, (PG1), (PG2), (PG3) et (PG4), des points de contrôle $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ d'un carreau de Bézier obtenu par conversion d'un carreau de cyclide.

Identification	Propriétés géométriques
(PG1)	P_{00}, P_{02}, P_{22} et P_{20} sont cocycliques. $w_{00} = w_{20} = w_{02}$ et $w_{22} = 1 - pq$
(PG2)	$P_{00}P_{01} = P_{01}P_{02}$ $P_{02}P_{12} = P_{12}P_{22}$ $P_{22}P_{21} = P_{21}P_{20}$ $P_{00}P_{10} = P_{10}P_{20}$
(PG3)	$\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \perp \overrightarrow{P_{00}P_{01}}$ $\overrightarrow{P_{02}P_{01}} \perp \overrightarrow{P_{02}P_{12}}$ $\overrightarrow{P_{22}P_{12}} \perp \overrightarrow{P_{22}P_{21}}$ $\overrightarrow{P_{20}P_{21}} \perp \overrightarrow{P_{20}P_{10}}$
(PG4)	$\{P_{11}\} = Aff\{P_{00}; P_{01}; P_{10}\} \cap Aff\{P_{02}; P_{12}; P_{01}\}$ $\cap Aff\{P_{22}; P_{21}; P_{12}\} \cap Aff\{P_{20}; P_{21}; P_{10}\}$

Tableau 2. Propriétés géométriques d'un carreau de Bézier obtenu par conversion d'un carreau de cyclide.

4. Conversion de carreaux de Bézier en CdD

Dans cette section, nous résumons les conditions que les points de contrôles et les poids définissant un carreau de Bézier doivent vérifier pour que celui-ci soit convertible. Ces conditions sont nécessaires et non suffisantes, puis nous donnons un exemple de carreau vérifiant ces conditions, mais non convertible. La dernière section sera consacrée à la présentation de l'algorithme de conversion proprement dit.

4.1. Carreaux de Bézier convertibles en CdD

Nous prenons un carreau de Bézier de points de contrôle pondérés $(P_{ij}; w_{ij})$ où $(i, j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket^2$ tels que les points vérifient le tableau 2. Les poids vérifient $w_{00} = w_{02} = w_{20} = 1$, $w_{22} = 1 - pq$, formule (16). Nous utilisons la formule (9) du théorème 1 pour calculer w_{01} , w_{21} , w_{10} , w_{12} avec $w_{01}w_{21} > 0$ et $w_{10}w_{12} > 0$. Nous déterminons le poids w_{11} de façon à ce que le corollaire 1 soit vérifié.

Un carreau de Bézier construit de façon à remplir toutes ces conditions (nécessaires et non suffisantes) est appelé carreau de Bézier convertible en CdD.

Malheureusement, il est possible de construire un carreau de Bézier de telle façon que les conditions précédentes soient vérifiées et que l'on obtienne deux valeurs différentes pour w_{11} selon que l'on considère les points G_i^u ou les points G_i^v . Dans ce cas, la construction d'un carreau de Bézier convertible en CdD est impossible.

4.2. Carreaux de Bézier non convertibles en CdD

Un carreau de Bézier non convertible en CdD est un carreau dont les points de contrôle et les poids ne vérifient pas les conditions de construction et de calcul indiquées dans la section 4.1. La figure 10.(a) montre un carreau de Bézier non convertible ainsi que son polyèdre de contrôle. Les points de contrôle et les poids de ce carreau sont présentés dans le tableau 3. Le poids $w_{11} \simeq 0.558$ est déterminé de telle façon que la courbe isoparamétrique γ_v , obtenue en posant $v = \frac{1}{2}$, soit un arc de cercle, figure 10(b). Malheureusement, pour cette valeur de w_{11} , la courbe isoparamétrique γ_u , obtenue en posant $u = \frac{1}{2}$, n'est pas un arc de cercle mais un arc d'ellipse, figure 10.(b), donc ce carreau ne respecte pas le corollaire 1, il n'est pas convertible.

Nous avons essayé d'affecter une autre valeur au poids w_{11} mais le carreau demeure non convertible. En effet pour $w_{11} \simeq 0,694$, la courbe γ_u est alors un arc de cercle. Cependant, la courbe γ_v n'est plus un arc de cercle mais un arc d'ellipse.

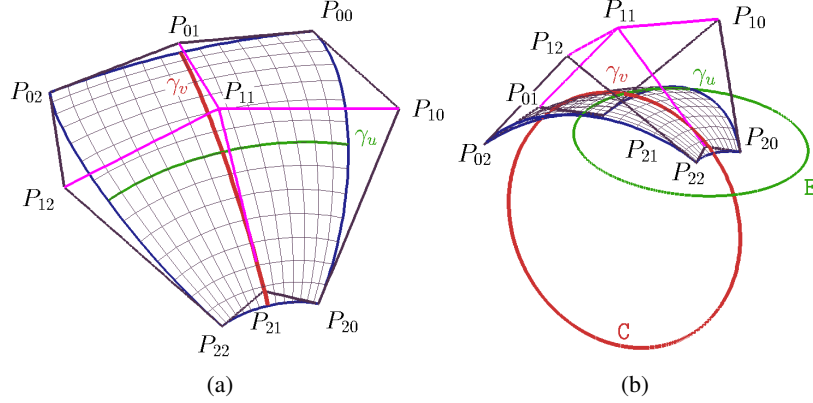


Figure 10. Carreau de Bézier non convertible en CdD. (a) le carreau de Bézier et son polyèdre de contrôle. (b) Une seule des deux courbes isoparamétriques tracées sur ce carreau est un arc de cercle.

Points de contrôle	Poids
$P_{00} \simeq (15 ; 0 ; 0)$	$w_{00} = 1$
$P_{01} \simeq (8 ; 8 ; 2,876)$	$w_{01} \simeq 0,963$
$P_{02} \simeq (0 ; 15 ; 0)$	$w_{02} = 1$
$P_{10} \simeq (7,000 ; -12,123 ; 14,250)$	$w_{10} \simeq 0,638$
$P_{11} \simeq (0 ; 0 ; 15)$	$w_{11} \simeq 0,558$
$P_{12} \simeq (-12,123 ; 7,000 ; 14,250)$	$w_{12} \simeq 0,638$
$P_{20} \simeq (-7,500 ; -12,990 ; 0)$	$w_{20} = 1$
$P_{21} \simeq (-8,895 ; -8,895 ; 1,171)$	$w_{21} \simeq 0,622$
$P_{22} \simeq (-12,990 ; -7,500 ; 0)$	$w_{22} = 1$

Tableau 3. Points de contrôle et poids d'un carreau de Bézier non convertible en CdD.

4.3. Algorithme de conversion

Dans l'algorithme de conversion, nous avons besoin de construire la perpendiculaire commune à deux droites données. Cette construction est détaillée dans [GAR 84].

Situé en annexe, l'algorithme 1 permet de convertir un carreau de Bézier convertible en cyclide en utilisant les cercles principaux du plan \mathcal{P}_z . Nous allons dérouler cet algorithme pas à pas sur un exemple. La figure 11.(a) montre :

- Le carreau de Bézier convertible,
- Son polyèdre de contrôle,
- $RQBC \{(G_0^u; G_1^u; G_2^u), (\alpha_0^u; \alpha_1^u; \alpha_2^u)\}$,
- $RQBC \{(G_0^v; G_1^v; G_2^v), (\alpha_0^v; \alpha_1^v; \alpha_2^v)\}$,

- Les courbes de Bézier γ_3^+ , γ_4^+ , γ_5^+ et γ_6^+ bordant le carreau de Bézier convertible.

Les sommets du carreau sont P_{00} , P_{20} , P_{02} et P_{22} . Les coordonnées des points de contrôle et les poids sont donnés dans le tableau 4.

Points de contrôle	Poids
$P_{00} = (4; 0; 0)$	$w_{00} = 1$
$P_{01} = (\frac{32}{97}; \frac{32}{97}; \frac{440}{97})$	$w_{01} \simeq 0,484$
$P_{02} = (0; 4; 0)$	$w_{02} = 1$
$P_{10} = (-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{22\sqrt{3}+27}{5+13\sqrt{3}}; \frac{4}{3}; \frac{22\sqrt{3}+27}{5+13\sqrt{3}}; -5\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}+1}{3})$	$w_{10} \simeq 0,157$
$P_{11} = (0; 0; 8)$	$w_{11} \simeq -0,110$
$P_{12} = (2; 2; -5)$	$w_{12} \simeq 0,339$
$P_{20} = (0; -2\sqrt{3}; 0)$	$w_{20} = 1$
$P_{21} = (-32 \frac{\sqrt{3}+1}{275+97\sqrt{3}}; -32\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}+1}{275+97\sqrt{3}}; -440 \frac{\sqrt{3}+3}{97\sqrt{3}+275})$	$w_{21} \simeq 0,552$
$P_{22} = (-4; 0; 0)$	$w_{22} \simeq 0,933$

Tableau 4. Points de contrôle et poids du carreau de Bézier de la figure 11.(a).

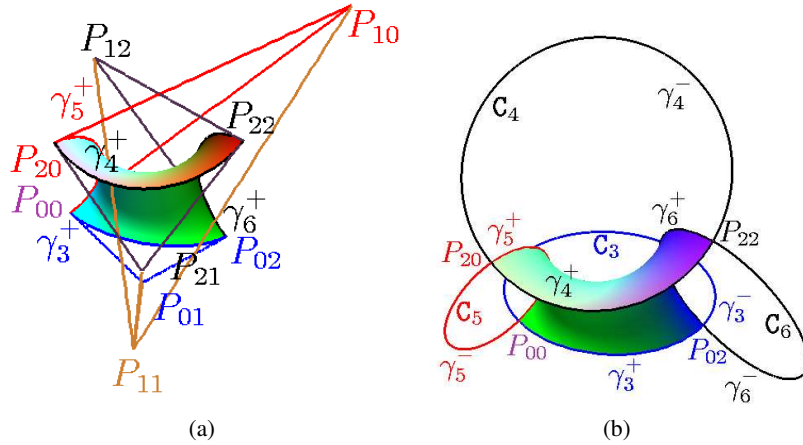


Figure 11. Illustration de l'algorithme 1. La figure (a) montre le carreau de Bézier convertible, et (b) montre la détermination des cercles de bordure du carreau de Bézier convertible.

La première étape de l'algorithme 1 est la détermination des cercles bordant le carreau de Bézier convertible. Chaque cercle est représenté par une union de deux courbes de Bézier quasi-standard, figure 11.(b). Par exemple, le cercle C_3 est l'union des courbes de Bézier sous forme quasi-standard de points de contrôle P_{00} , P_{01} et P_{02} et de poids médians opposés $f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})$ et $-f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})$, où f_w est définie par la formule (10). Afin d'améliorer la lisibilité des figures, leurs orientations ne seront pas toujours les mêmes.

A l'aide de la section 3.2, nous déterminons le type de la cyclide obtenue ainsi que les droites Δ_θ et Δ_ψ qui sont les intersections des plans engendrés par les lignes de courbure de la future cyclide, figure 12.(a). Nous construisons ensuite le repère de la cyclide (à une translation de vecteur \vec{v}_0 près) afin de déterminer le plan \mathcal{P}_z , plan dans lequel nous allons construire les cercles principaux de la cyclide. Pour cela, nous déterminons Δ_0 qui est la perpendiculaire commune aux droites Δ_θ et Δ_ψ . Le point H_θ (resp. H_ψ), intersection entre les droites Δ_0 et Δ_θ (resp. Δ_ψ), est construit. Le plan \mathcal{P}_z est déterminé par les droites Δ_0 et Δ_ψ , figure 12.(b).

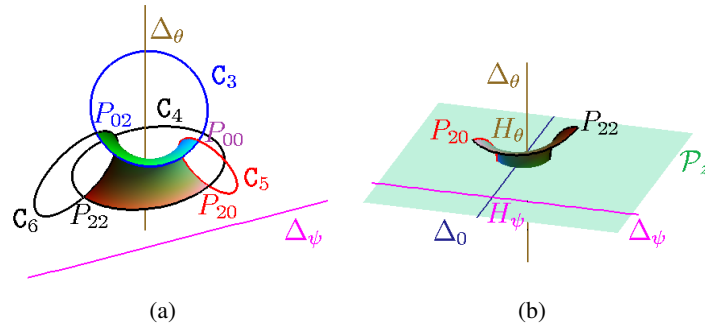


Figure 12. Illustration de l'algorithme 1. (a) le carreau de Bézier convertible avec les quatre cercles de bordure et les droites Δ_θ et Δ_ψ . (b) le carreau de Bézier convertible avec les droites Δ_0 , Δ_θ et Δ_ψ .

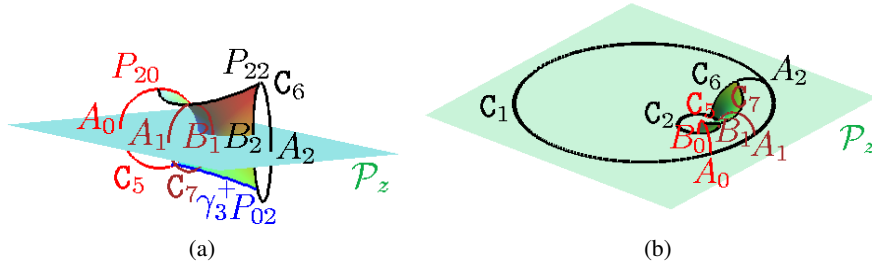


Figure 13. Illustration de l'algorithme 1. (a) le carreau de Bézier convertible avec les cercles C_5 , C_6 et C_7 et leurs intersections A_0 , A_1 , A_2 , B_0 , B_1 et B_2 avec le plan \mathcal{P}_z . (b) détermination des cercles principaux de la cyclide dans le plan \mathcal{P}_z .

Un cercle étant complètement déterminé à l'aide de trois points, il suffit donc de connaître trois points de chaque cercle principal. Les intersections des cercles C_5 et C_6 avec le plan \mathcal{P}_z ne nous donnent que deux couples de deux points. Il est nécessaire de déterminer un autre couple de points à partir d'un autre cercle C_7 engendré par le carreau. Le choix s'est porté sur le cercle C_7 passant par $S(0; \frac{1}{2})$, $S(1; \frac{1}{2})$ et $S(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ où S , nappe paramétrée définissant le carreau de Bézier convertible, est définie sur $[0; 1]^2$. Les cercles C_5 et C_6 sont obtenus en prenant comme valeur, pour le second

paramètre, 0 et 1. Il est alors naturel de définir le cercle C_7 en prenant comme valeur $\frac{1}{2}$. Les points A_0, A_1 et A_2 (resp. B_0, B_1 et B_2) sont ainsi obtenus, figure 13.(a). Ces deux couples de trois points permettent la construction du grand (resp. petit) cercle principal du plan \mathcal{P}_z de la cyclide, figure 13.(b).

La figure 14.(a) montre le carreau de Bézier convertible, la cyclide de type ring et ses deux cercles principaux du plan \mathcal{P}_z . Les paramètres de la cyclide sont $a \simeq 6,6$, $\mu \simeq 4,8$ et $c \simeq 3,1$. La figure 14.(b) montre le carreau de Bézier convertible et la partie de la cyclide de type ring correspondant au carreau de Bézier convertible.

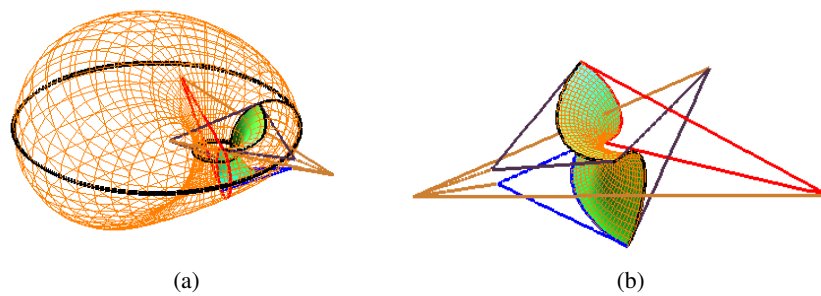


Figure 14. Illustration de l'algorithme 1. (a) le carreau de Bézier convertible, son polyèdre de contrôle, la cyclide et ses deux cercles principaux dans \mathcal{P}_z . (b) le carreau de Bézier convertible, son polyèdre de contrôle et la partie utile de la cyclide.

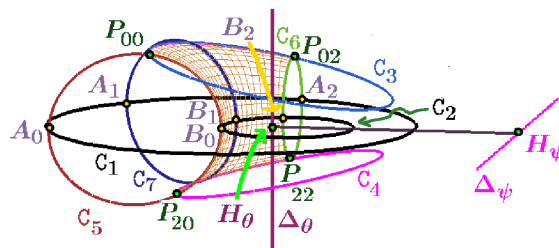


Figure 15. Schéma illustrant l'algorithme 1

Lorsque nous savons qu'un point M_0 appartient à une ligne de courbure obtenue avec un des paramètres constants (soit $\theta = \theta_0$, soit $\psi = \psi_0$) d'une cyclide définie par la nappe paramétrée de la formule (12), nous pouvons déterminer la valeur de l'autre paramètre ψ_0 ou θ_0 telle que nous ayons $\Gamma_d(\theta_0, \psi_0)$ [GAR 04]. Les points B_0 et B_2 sont les points d'intersection entre les cercles C_5 et C_6 bordant le carreau de Bézier et le cercle principal de la cyclide obtenu avec $\psi = 0$ et nous pouvons alors déterminer l'intervalle de visualisation de la cyclide en θ . En considérant les points P_{00} et P_{20} , nous pouvons alors déterminer l'intervalle de visualisation de la cyclide en ψ . Le domaine de visualisation est environ :

$$[-0,546; 1,100] \times [-1,171; 0,869]$$

Tous les éléments de l'algorithme 1 permettant de convertir un carreau de Bézier convertible en cyclide en utilisant le plan \mathcal{P}_z sont résumés dans la figure 15.

Points de contrôle	Poids
$P_{00} = (4; 0; 0)$	$w_{00} = 1$
$P_{01} \simeq (2, 200; 2, 200; -3, 440)$	$w_{01} \simeq 0, 634$
$P_{02} = (0; 4; 0)$	$w_{02} = 1$
$P_{10} \simeq (-7, 982; 4, 609; 9, 217)$	$w_{10} \simeq 0, 127$
$P_{11} = (0; 0; 8)$	$w_{11} \simeq 0, 247$
$P_{12} \simeq (2, 500; -2, 500; 5)$	$w_{12} \simeq 0, 319$
$P_{20} = (2; -2\sqrt{3}; 0)$	$w_{20} = 1$
$P_{21} \simeq (-1, 655; -2, 866; -4, 482)$	$w_{21} \simeq 0, 576$
$P_{22} = (-4; 0; 0)$	$w_{22} \simeq 0, 933$

Tableau 5. Coordonnées des points de contrôle et des poids du carreau de Bézier de la figure 16.(a).

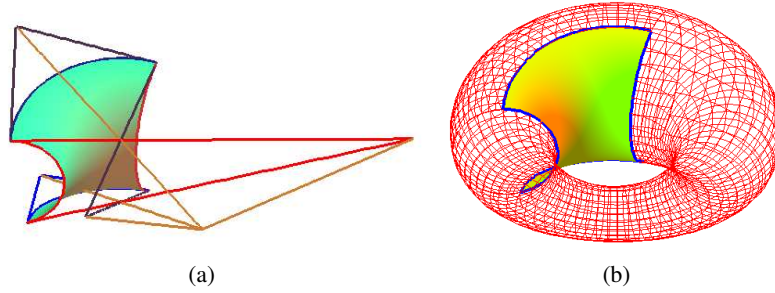


Figure 16. Un deuxième exemple de conversion. La figure (a) montre un carreau de Bézier convertible, et (b) la cyclide, de type ring, résultant de la conversion.

La figure 16 (resp. 17) montre la conversion d'un carreau de Bézier convertible en un carreau de cyclide de type ring (resp. spindle). Dans chaque exemple, il est possible de voir le carreau de Bézier convertible et son polyèdre de contrôle dans l'image de gauche et le carreau de Bézier convertible sur la cyclide dans l'image de droite. Les points de contrôle et les poids du carreau de Bézier sont donnés dans le tableau 5 (resp. 6).

Les paramètres de la cyclide de la figure 16.(b) sont $a \simeq 4, 3$, $c \simeq 1, 0$ et $\mu \simeq 2, 1$ et le domaine de visualisation est environ :

$$[2, 849; 4, 701] \times [-1, 614; 1, 279]$$

Les paramètres de la cyclide de la figure 17.(b) sont $a \simeq 2, 9$, $c \simeq 0, 7$ et $\mu \simeq 3, 3$ et le domaine de visualisation est environ :

$$[-1.060; 1.060] \times [-4, 560; -1, 722]$$

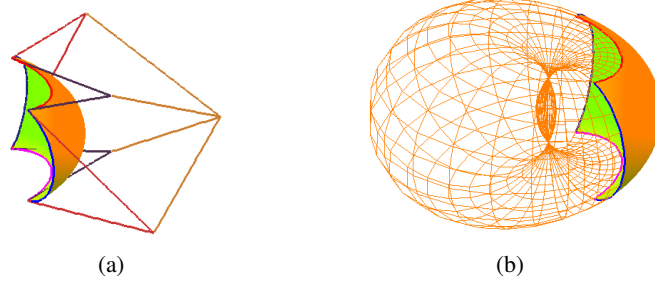


Figure 17. Un troisième exemple de conversion. La figure (a) montre un carreau de Bézier convertible, et (b) la cyclide, de type spindle, résultant de la conversion.

Points de contrôle	Poids
$P_{00} = (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0)$	$w_{00} = 1$
$P_{01} = (0; 12; 5)$	$w_{01} \simeq 0,261$
$P_{02} = (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0)$	$w_{02} = 1$
$P_{10} = \left(\frac{72(70\sqrt{2} - 59)}{(174\sqrt{2} - 25)(-1 + 6\sqrt{2})}; 0; -\frac{40(9\sqrt{2} - 38)}{174\sqrt{2} - 25} \right)$	$w_{10} \simeq 0,516$
$P_{11} = (0; 0; 10)$	$w_{11} \simeq 0,303$
$P_{12} = \left(-\frac{72(70\sqrt{2} - 59)}{(174\sqrt{2} - 25)(-1 + 6\sqrt{2})}; 0; -\frac{40(9\sqrt{2} - 38)}{174\sqrt{2} - 25} \right)$	$w_{12} \simeq 0,516$
$P_{20} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$	$w_{20} = 1$
$P_{21} = (0; -12; 5)$	$w_{21} \simeq 0,261$
$P_{22} = (-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$	$w_{22} = 1$

Tableau 6. Coordonnées des points de contrôle et des poids du carreau de Bézier de la figure 17.(a).

5. Conclusion et perspectives

En nous inspirant de l'algorithme de K. Ueda permettant de convertir un carreau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier rationnel biquadratique et en utilisant les propriétés des courbes et surfaces de Bézier rationnelles de degré 2, nous avons montré comment construire puis convertir un carreau de Bézier rationnel biquadratique en cyclide de Dupin quartique. C'est la première fois que ce travail de conversion est réalisé. De plus, cette méthode permet de construire un carreau de cyclide de Dupin quartique en utilisant seulement neuf points de contrôle.

L'algorithme de conversion pourrait être complété par une amélioration de la construction des points de contrôle du carreau de Bézier convertible pour pouvoir contrôler le type de la CdD résultante en fonction des positions spatiales des points de contrôle et par une étude des possibilités de conversion des carreaux de Bézier vers des carreaux de supercyclides.

Remerciements

Les auteurs remercient Gudrun Albrecht, Professeur à l'Université de Valenciennes, pour sa discussion fructueuse à propos de l'algorithme de K. Ueda. Nous tenons également à remercier les relecteurs de TSI dont les commentaires ont permis d'améliorer considérablement la qualité et la lisibilité de ce papier.

6. Bibliographie

- [ALB 96] ALBRECHT G., DEGEN W., « Construction of Bézier rectangles and triangles on the symmetric Dupin horn cyclide by means of inversion », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14, n° 4, 1996, p. 349–375, Elsevier Science.
- [AUM 95] AUMANN G., « Curvature continuous connections of cones and cylinders », *Computer-aided Design*, vol. 27, n° 4, 1995, p. 293–301, Elsevier Science.
- [BAN 70] BANCHOFF T., « The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres », *J. Diff. Geometry*, vol. 4, 1970, p. 193–205.
- [BER 78] BERGER M., *Géométrie 2*, vol. 5, Cedic-Nathan, 2ème édition, 1978.
- [BER 92] BERGER M., GOSTIAUX B., *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF, 2ème édition, avril 1992.
- [BOE 90] BOEHM W., « On cyclides in geometric modeling », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 7, n° 1-4, 1990, p. 243–255.
- [CHA 89] CHANDRU V., DUTTA D., HOFFMANN C. M., « Variable Radius Blending Using Dupin Cyclides », rapport n° CSD-TR-851, janvier 1989, Purdue University.
- [DAR 87] DARBOUX G., *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1887.
- [DAR 17] DARBOUX G., *Principes de géométrie analytique*, Gauthier-Villars, 1917.
- [DEG 86] DEGEN W. L. F., « Die zweifachen Blutelschen Kegelschnittflächen », *Manuscripta Mathematica*, vol. 55, 1986, p. 9-38.
- [DEG 94] DEGEN W. L. F., « Generalized Cyclides for Use in CAGD », BOWYER A., Ed., *The Mathematics of Surfaces IV*, Oxford, 1994, Clarendon Press, p. 349–363.
- [DEG 98] DEGEN W. L. F., « On the origin of supercyclides », CRIPPS R., Ed., *Proceedings of the 8th IMA Conference on the Mathematics of Surfaces (IMA-98)*, vol. VIII de *Mathematics of Surfaces*, Winchester, UK, septembre 1998, Information Geometers, p. 297–312.
- [DEM 98] DEMENGEL G., POUGET J. P., *Mathématiques des Courbes et des Surfaces. Modèles de Bézier, des B-Splines et des NURBS*, vol. 1, Ellipse, 1998.
- [DUP 22] DUPIN C. P., *Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc.*, Bachelier, Paris, 1822.
- [DUT 93] DUTTA D., MARTIN R. R., PRATT M. J., « Cyclides in Surface and Solid Modeling », *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 13, n° 1, 1993, p. 53–59.
- [FAR 99] FARIN G. E., *NURBS : From Projective Geometry to Practical Use*, A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 1999.
- [FIO 92] FIOROT J. C., JEANNIN P., *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, vol. RMA 24 de *Recherches en Mathématiques Appliquées*, Masson, 1992.

- [FOR 12] FORSYTH A. R., *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Cambridge University Press, 1912.
- [FOR 68] FOREST A., « Curves and Surfaces for Computer-Aided Design », PhD thesis, University of Cambridge, 1968.
- [FOU 04] FOUFOU S., GARNIER L., « Dupin cyclides as quadrics blends for shape modeling », *Eurographics 2004*, vol. 23, Grenoble, France, August-September 2004, Blackwell, p. 321-330.
- [FOU 05] FOUFOU S., GARNIER L., PRATT M., « Conversion of Dupin Cyclide Patches into Rational Biquadratic Bézier Form », MARTIN R., BEZ H., SABIN M., Eds., *Proceedings of the 11th Conference on the Mathematics of Surfaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, September 2005, p. 201-218.
- [GAL 94] GALLAGHER T., PIPER B., SURFACE C., « Designing Fair Curves and Surfaces : Shape Quality in Geometric Modeling and Computer-Aided Design », 1994.
- [GAR 84] GARNIER J. M., *Algèbre Linéaire et Géométrie Vectorielle*, Guérin Montréal-Toronto, 1st édition, 1984.
- [GAR 04] GARNIER L., « Utilisation des cyclides de Dupin quartiques et des supercyclides quartiques en modélisation géométrique », PhD thesis, Université de Bourgogne, Dijon, France, Décembre 2004.
- [HEB 81] HEBDA J., « Manifolds admitting taut hyperspheres », *Pacific J. Math.*, vol. 97, 1981, p. 119–124.
- [HOS 93] HOSCHEK J., LASSER D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A.K.Peters, Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [LEL 91] LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J. M., *Cours de Mathématiques : variétés, courbes et surfaces*, vol. 3, Dunod, 2 édition, Octobre 1991.
- [MAR 82] MARTIN R. R., « Principal patches for computational geometry », PhD thesis, Engineering Department, Cambridge University, 1982.
- [MAR 84] MARTIN R. R., « Principal Patches - a New Class of Surface Patch based on Differential Geometry », *Eurographics'83*, North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 47-55.
- [MAR 86] MARTIN R., DE PONT J. J., SHARROCK T., « Cyclide surfaces in computer aided design », CLARENDON PRESS O., Ed., *Proceedings of the 11th Conference on the Mathematics of Surfaces*, J.A. Gregory (Ed.), 1986, p. 253–267.
- [MAX 68] MAXWELL J. C., « On the cyclide », *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, , 1868, p. 111–126.
- [MOU 04] MOUTARD, *Annales de Mathématiques*, Bulletin de la société Philomatique et compte rendu de l'Académie, 1804.
- [NUT 88] NUTBOURNE A. W., MARTIN R. R., *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design*, vol. 1 : Foundations, Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [PAL 98] PALUSZNY M., BOEHM W., « General Cyclides », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 15, n° 7, 1998, p. 699–710.
- [PIN 85] PINKALL U., « Dupin hypersurfaces », *Math. Ann.*, vol. 270, n° 3, 1985, p. 427–440.
- [PON 84] DE PONT J. J., « Essays on the Cyclide Patch », PhD thesis, Cambridge University Engineering Department, 1984.

- [PRA 90] PRATT M. J., « Cyclides in computer aided geometric design », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 7, n° 1-4, 1990, p. 221–242, Elsevier Science.
- [PRA 93] PRATT M., « Cyclides in solid modelling : recent developments », *Proceedings on the second ACM symposium on Solid modeling and applications*, Montreal, Quebec, Canada, May 19-21 1993, ACM, p. 189-200.
- [PRA 94] PRATT M. J., « Dupin Cyclides and Supercyclides », MULLINEUX G., Ed., *Proceedings of the 6th IMA Conference on the Mathematics of Surfaces (IMA-94)*, Brunel University, September 1994, Oxford University Press, p. 43–66.
- [PRA 95] PRATT M. J., « Cyclides in computer aided geometric design II », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 12, n° 2, 1995, p. 131–152, Elsevier Science.
- [PRA 97] PRATT M. J., « Quartic Supercyclides I : Basic Theory », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14, n° 7, 1997, p. 671–692.
- [REI 97] REINHARDT F., SOEDER H., *Atlas des Mathématiques*, Le livre de Poche, Librairie générale française, 1997.
- [SHE 00] SHENE C., « Do Blending and Offsetting Commute for Dupin Cyclides », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 17, n° 9, 2000, p. 891–910.
- [SRI 95] SRINIVAS Y. L., DUTTA D., « Rational parametric representation of parabolic cyclide : Formulation and applications », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 12, n° 6, 1995, p. 551-566, Elsevier Science, ISSN 0167-8396.
- [SRI 96] SRINIVAS Y. L., KUMAR K. P. V., DUTTA D., « Surface design using cyclide patches », *Computer-aided Design*, vol. 28, n° 4, 1996, p. 263-276, Elsevier Science.
- [TAU 00] TAUVEL P., *Cours de Géométrie*, Dunod, 1ère édition, Janvier 2000.
- [UED 95] UEDA K., « Normalized Cyclide Bézier Patches », DAEHLEN M., LYCHE T., SCHUMAKER L., Eds., *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Nashville, USA, 1995, Vanderbilt University Press, p. 507–516, Proc. of the International Conference on Math. Methods in CAGD, Ulvik, Norway, June 16-21, 1994.
- [ZHO 92] ZHOU X., STRASSER W., « A NURBS approach to cyclides », *Computers In Industry*, vol. 19, n° 2, 1992, p. 165–174.

Algorithme 1 : Conversion d'un carreau de Bézier en un carreau CdD

Données : Soit S la nappe paramétrée d'un carreau de Bézier convertible, figure 11.(a), de points de contrôle $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ et de poids $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ tels que :

$$\begin{aligned} Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \cap Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22}) &\neq \emptyset \\ Aff(P_{00}; P_{10}; P_{20}) \cap Aff(P_{02}; P_{12}; P_{22}) &\neq \emptyset \end{aligned} \quad (19)$$

Début

1. Détermination des cercles (C_3, C_4, C_5, C_6) engendrés par les bords du carreau en utilisant deux courbes de Bézier, figure 11.(b).

$$\begin{aligned} \gamma_3^+ &= RQBC \{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}, \\ \gamma_3^- &= RQBC \{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), -f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}, C_3 = \gamma_3^+ \cup \gamma_3^-. \\ \gamma_4^+ &= RQBC \{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}, \\ \gamma_4^- &= RQBC \{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), -f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}, C_4 = \gamma_4^+ \cup \gamma_4^-. \\ \gamma_5^+ &= RQBC \{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}, \\ \gamma_5^- &= RQBC \{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), -f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}, C_5 = \gamma_5^+ \cup \gamma_5^-. \\ \gamma_6^+ &= RQBC \{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}, \\ \gamma_6^- &= RQBC \{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), -f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}, C_6 = \gamma_6^+ \cup \gamma_6^-. \end{aligned}$$
2. Détermination du type de la cyclide (ring, horned ou spindle) et des droites Δ_θ et Δ_ψ en utilisant les critères du paragraphe 3.2.
3. Détermination des droites $\Delta_1 = Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \cap Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22})$ et $\Delta_2 = Aff(P_{00}; P_{10}; P_{20}) \cap Aff(P_{02}; P_{12}; P_{22})$ et Δ_0 est la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 . Modulo une permutation des indices i et j , nous pouvons supposer que $\Delta_1 = \Delta_\theta$ et $\Delta_2 = \Delta_\psi$, figure 12.(a).
4. Détermination de la base orthonormée de la cyclide.
 H_θ (resp. H_ψ) est l'intersection des droites Δ_0 et Δ_θ (resp. Δ_0 et Δ_ψ). Posons $\vec{w}_0 = \frac{1}{H_\theta H_\psi} \vec{H}_\theta \vec{H}_\psi$. \vec{j}_0 est un vecteur unitaire directeur de Δ_ψ et $\vec{k}_0 = \vec{w}_0 \times \vec{j}_0$. L'origine du nouveau repère est un point Ω de Δ_0 et \mathcal{P}_z est le plan passant par Ω de vecteur normal \vec{k}_0 , figure 12.(b).
5. Construction d'un cercle sur le carreau afin de déterminer les points permettant la construction des cercles principaux, figure 13.(a).
 C_7 est le cercle passant par $= S(0; \frac{1}{2}), S(1; \frac{1}{2})$ et $S(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.
6. Détermination des points permettant la construction des cercles principaux.
 $\{A_0; B_0\} = C_5 \cap \mathcal{P}_z, \{A_1; B_1\} = C_7 \cap \mathcal{P}_z$ et $\{A_2; B_2\} = C_6 \cap \mathcal{P}_z$ tels que : $\forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, d(B_i; \Delta_\theta) \leq d(A_i; \Delta_\theta)$, figure 13.(a).
7. Détermination des cercles principaux de la cyclide, figure 13.(b).
 Les cercles principaux C_1 et C_2 sont les cercles, dans \mathcal{P}_z , de centre O_1 (resp. O_2) passant par A_0, A_1 et A_2 (resp. B_0, B_1 et B_2) et de rayon $\rho_1 = O_1 A_0$ et $\rho_2 = O_2 B_0$. Le centre de la cyclide est le milieu du segment $[O_1 O_2]$.
8. Détermination des paramètres de la cyclide.
 Nous obtenons $c = \frac{O_1 O_2}{2}$. Si nous obtenons une cyclide de type spindle, nous avons $a = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, sinon nous avons $a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$.
9. Détermination des valeurs $\theta_0, \theta_1, \psi_0$ et ψ_1 pour obtenir le carreau de cyclide correspondant au carreau de Bézier convertible en utilisant les courbes coordonnées du carreau de Bézier convertible.

Fin

Sortie : Un carreau de cyclide modélisant un carreau de Bézier convertible.