

Cours MP Techniques de Traitement du Signal
Une approche phénoménologique

O. Laligant, F. Truchetet

2010

Contents

1	La convolution	1
1.1	Introduction	1
1.1.1	Approximation discrète	3
1.1.2	Retour au cas continu	5
1.2	Définition du produit de convolution	6
1.3	Réponse d'un SLI à partir du produit de convolution	7
1.3.1	Principe de fonctionnement de l'opérateur "convolution"	7
1.3.2	Propriétés du produit de convolution	9
1.4	Réponse d'un SLI à un signal sinusoïdal	10
1.4.1	Réponse à une exponentielle complexe	10
1.4.2	Réponse à une entrée sinusoïdale	11
2	La corrélation des signaux	13
2.1	Introduction	13
2.2	Représentation des signaux	13
2.2.1	Signaux continus, signaux déterministes, signaux aléatoires	13
2.2.2	Signaux discrets, signaux déterministes, signaux aléatoires	14
2.3	Intercorrélation	15
2.4	Autocorrélation	18
2.5	Propriété fondamentale	18
2.6	Intercorrélation du bruit blanc et applications de l'intercorrélation	19
2.6.1	Détermination de la réponse impulsionnelle d'un SLI	19
2.6.2	Application à la synchronisation de systèmes	20
2.6.3	Application à la détection/reconnaissance de signaux noyés dans le bruit	20
3	Modulation d'amplitude	23
3.1	Problématique	23
3.2	La modulation d'amplitude	23
3.3	La démodulation d'amplitude	27
3.3.1	Détecteur d'enveloppe	27
3.3.2	Détection synchrone	30

3.4	Les modulations angulaires (de fréquence et de phase)	30
3.5	Démodulation de fréquence	34

Chapter 1

La convolution

1.1 Introduction

On se propose d'étudier les systèmes **Linéaires** et **Invariants SLI**. Nous nous restreindrons aux systèmes scalaires possédant une entrée et une sortie et ne dépendant que d'une variable:

$$e(t) \rightarrow s(t)$$

Un système invariant a des propriétés qui ne varient pas avec le temps. Le choix de l'origine de l'échelle temporelle est indifférent. De façon plus formelle pour ces systèmes on a

$$e(t - t_0) \rightarrow s(t - t_0) \quad \forall t_0, t$$

Exemples: un composant passif ou actif électrique, résistance, inductance, capacité, transistor, ampli. op., un ressort, un radiateur, un opérateur de retard, etc. De nombreux dispositifs physiques peuvent être modélisés par un système invariant.

Contrexemples: un opérateur d'inversion temporel, un opérateur d'échantillonnage.

Un système linéaire reproduit en sortie les combinaisons linéaires d'excitation (ou entrée). De façon plus formelle

$$\alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \rightarrow \alpha s_1(t) + \beta s_2(t) \quad \forall \alpha, \beta, t$$

Exemples: un composant passif électrique, un ampli. op. pour des niveaux inférieurs aux tensions de saturation, un ressort utilisé dans sa limite d'élasticité,

Contrexemples: un transistor en régime saturé, une diode, une diode zener, un opérateur de seuillage,

Dans de nombreux cas pratiques un système linéaire et invariant peut-être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (circuit RC).

Prenons un exemple simple choisi hors du champ de l'électricité: on considère un bassin alimenté en eau et muni d'une ouverture de trop plein; à noter que la

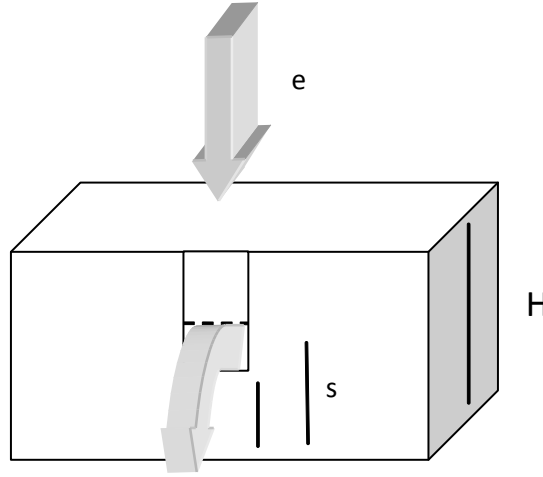


Figure 1.1: Exemple d'un réservoir muni d'un trop plein

conduction de la chaleur dans un solide peut être modélisée de la même façon. On suppose que le débit de l'eau est proportionnel à la section de la veine liquide. Si l'ouverture du trop plein a des parois verticales, le débit du trop plein d est proportionnel à la hauteur de l'eau à partir d'une certaine valeur égale à la hauteur s_0 du "bec" du déversoir: $d = a(s - s_0)$ si $s > s_0$. La hauteur s de l'eau dans le bassin est supposée proportionnelle au volume d'eau stocké v : $s = kv$. Le débit d'arrivée d'eau e est l'entrée du système. On exprime la variation de volume de l'eau contenue dans le bassin par

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= e - d \\ \frac{1}{k} \frac{ds}{dt} &= e - a(s - s_0)\end{aligned}$$

L'équation différentielle qui régit l'évolution du système s'écrit donc

$$\frac{1}{k} \frac{ds}{dt} + a(s - s_0) = e$$

Ce système est un SLI si le déversoir est alimenté. Il est non-linéaire dans le cas général car il y a alors deux régimes de fonctionnement: un régime de remplissage sans constante de temps et un régime de régulation avec un temps de réponse. Il est également non linéaire si les parois du bassin ou du déversoir ne sont pas verticales. Il est dans tous les cas invariant.

Des exemples analogues pourraient être donnés en thermique ou en électricité: chauffage d'une pièce, thermomètre, galvanomètre à aiguille, et dans bien d'autres domaines. Les SLI sont un modèle très courant, ils ont en général une plage restreinte de validité pour chaque cas, mais ils permettent une description simple de nombreux dispositifs et phénomènes. Dans l'exemple proposé ci-dessus, l'équation différentielle peut-être résolue assez facilement pour certaines

fonctions d'entrée: échelon, impulsion, sinusoïde, mais la réponse générale est a priori difficile à déterminer car il faut trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, et ce second membre peut avoir une expression compliquée.

Exemple de résolution pour un échelon unité: si $e(t) = Eu(t)$, $u(t)$ est la "fonction" échelon d'amplitude 1 et si à $t = 0$, $s = s_0$

$$s - s_0 = \frac{E}{a}(1 - e^{-akt}) \quad (1.1)$$

On voit que la hauteur de l'eau dans le réservoir (1.2), après une période

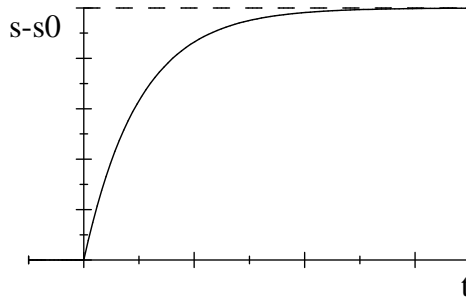


Figure 1.2: Evolution de la hauteur de l'eau dans le réservoir au cours du temps.

transitoire atteint une valeur fixe qui correspond au régime permanent. Cette valeur est proportionnelle au débit d'entrée de l'eau, le système est linéaire:

$$s - s_0 = \frac{E}{a}$$

Le système est caractérisé par une certaine constante de temps $\tau = \frac{1}{ak}$ et on considère que le régime permanent est atteint (à 5% près) au bout d'un temps égal à trois fois la constante de temps. Cette constante de temps dépend en particulier du volume (V) du bassin: $k = \frac{H}{V}$, plus le bassin est grand pour une profondeur H donnée, plus la constante de temps sera grande. On peut dire que le système a besoin d'un certain temps d'**intégration** pour atteindre son état permanent. Pendant ce temps d'intégration, l'eau s'accumule dans le réservoir et la sortie à chaque instant est le résultat de cette accumulation, cet effet de "retard" s'estompe progressivement et le régime permanent est atteint.

1.1.1 Approximation discrète

En découpant le temps en intervalles, Δt très petits, on peut admettre que le système n'évolue notablement qu'aux frontières des intervalles de temps et que durant l'intervalle il reste stationnaire. On notera $t = n\Delta t$. Dans ces conditions

la dérivée est approximée par une différence finie et l'équation différentielle devient (en posant pour simplifier $s_0 = 0$ et en prenant Δt comme unité de temps)

$$\begin{aligned} s(n+1) - s(n) + kas(n) &= ke(n) \\ s(n+1) &= (1-ak)s(n) + ke(n) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation récursive qui exprime la sortie à l'instant $(n+1)\Delta t$ en fonction de la sortie et de l'entrée à l'instant $n\Delta t$. En itérant cette expression il vient

$$\begin{aligned} s(n) &= (1-ak)s(n-1) + ke(n-1) \\ s(n) &= (1-ak)(1-ak)s(n-2) + (1-ak)ke(n-2) + ke(n-1) \\ s(n) &= (1-ak)(1-ak)(1-ak)s(n-3) + (1-ak)(1-ak)ke(n-3) \\ &\quad + (1-ak)ke(n-2) + ke(n-1) \end{aligned}$$

et après un nombre infini d'itérations

$$\begin{aligned} s(n) &= (1-ak)(1-ak)\cdots s(-\infty) + (1-ak)^\infty ke(-\infty) + (1-ak)^2 ke(n-3) \\ &\quad + (1-ak)ke(n-2) + ke(n-1) \\ s(n) &= (1-ak)(1-ak)\cdots s(-\infty) + \sum_{l=1}^{\infty} (1-ak)^{l-1} ke(n-l) \end{aligned}$$

Le premier terme est nul si le système est dans un état initial fini. Le second terme est construit par addition successive des valeurs d'entrée multipliées par un terme qui évolue au cours du temps, la suite ces termes: $k, k(1-ak), k(1-ak)^2, \dots, (1-ak)^\infty k$ représente la réponse du système à une impulsion unité. En effet, si l'entrée est nulle à chaque instant sauf à l'instant initial et pendant la fenêtre Δt à l'unité, la sortie s'écrit (si on suppose le système au repos initialement

$$\begin{aligned} s(n) &= (1-ak)^{n-1} ke(0) \\ h(n) &= (1-ak)^{n-1} k \end{aligned}$$

On a coutume de noter cette réponse à une impulsion unité ou **réponse impulsionnelle**, $h(n)$ et donc

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{l=1}^{\infty} (1-ak)^{l-1} ke(n-l) \\ s(n) &= \sum_{l=1}^{\infty} h(l)e(n-l) \end{aligned}$$

On peut généraliser ce résultat, en effet, une entrée quelconque peut s'écrire comme la somme d'impulsions unités d'amplitudes variables:

$$e(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e(l)\delta(l-n)$$

Si la réponse à une impulsion unité est $h(l)$ alors la réponse à une impulsion unité d'amplitude $e(l)$ sera $e(l)h(l)$: linéarité du système. Et la réponse à une impulsion unité translatée de n , $\delta(l - n)$ sera $h(l - n)$: invariance du système. Donc la réponse à une somme d'impulsions d'amplitudes variables et translatée sera donnée par

$$s(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e(l)h(l - n)$$

$$s(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)e(l - n)$$

1.1.2 Retour au cas continu

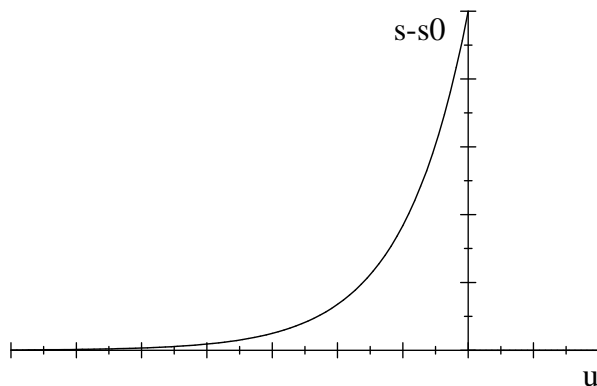
SI on quitte l'approximation discrète pour revenir au cas continu, la réponse

$$s(n) \simeq \sum_{l=1}^{\infty} h(l)e(n - l)$$

s'écrira, avec $u = l\Delta t$ et $t = n\Delta t$ et Δt infiniment petit,

$$s(t) = \int_{u=0}^{+\infty} h(u)e(t - u)du \quad (1.2)$$

On peut montrer de façon rigoureuse mathématiquement que le système peut-être caractérisé par une certaine "fenêtre temporelle" glissante d'intégration. Pour le système considéré, la "fenêtre temporelle", la réponse impulsionnelle renversée dans le temps $h(-t)$, a l'allure suivante



Fenêtre temporelle d'intégration

La réponse à l'instant τ est une somme pondérée de l'entrée par la fenêtre temporelle de l'entrée depuis le début des temps jusqu'au temps présent.

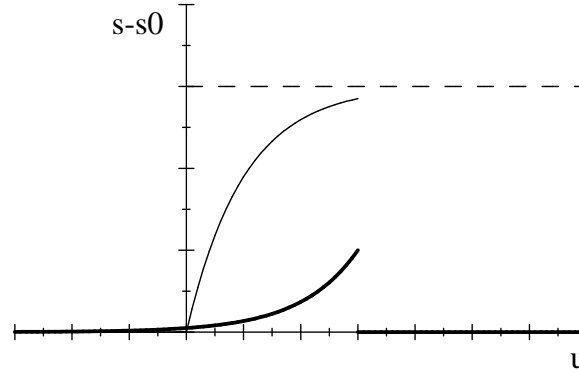


Figure 1.3: fenêtre glissante (trait gras), réponse (trait fin)

L'entrée e est multipliée par la fenêtre positionnée à l'instant t et le résultat est intégré. Si on note $h(t)$ la fenêtre temporelle renversée dans le temps, on obtient la formule suivante

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u)h(t-u)du$$

1.2 Définition du produit de convolution

Le produit de convolution entre deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est défini de la façon suivante

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

Le produit de convolution de deux fonctions du temps est une fonction du temps. La variable d'intégration, notée u dans la formule est une variable muette, elle n'apparaît pas dans le résultat de l'intégration, on peut donc choisir n'importe quel nom pour cette variable.

Le produit de convolution est commutatif

$$f * g(t) = g * f(t)$$

On le vérifie aisément en essayant un changement de variable muette dans la formule d'intégration: $x = t - u$

Le produit de convolution est linéaire et invariant par rapport à chacun de ses termes.

$$f * (\alpha g + \beta h)(t) = \alpha f * g(t) + \beta f * h(t)$$

1.3 Réponse d'un SLI à partir du produit de convolution

Les résultats obtenus précédemment montrent que la réponse d'un SLI peut s'écrire de façon générale à partir de sa **réponse impulsionnelle** et du produit de convolution défini par l'équation 1.3.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= e * h(t) & (1.3) \\
 s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(u)h(t-u)du \\
 s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e(t-u)du
 \end{aligned}$$

Les deux formules sont évidemment équivalentes, il est souvent plus pratique d'en utiliser une que l'autre, ceci dépend du signal appliqué à l'entrée et de la forme de la réponse impulsionnelle. Notons que dans les systèmes physiques, la réponse impulsionnelle est nulle aux temps négatifs, le système est dit "**causal**". On retrouve alors la formule obtenue pour notre exemple.

$$s(t) = \int_0^{+\infty} h(u)e(t-u)du$$

1.3.1 Principe de fonctionnement de l'opérateur "convolution"

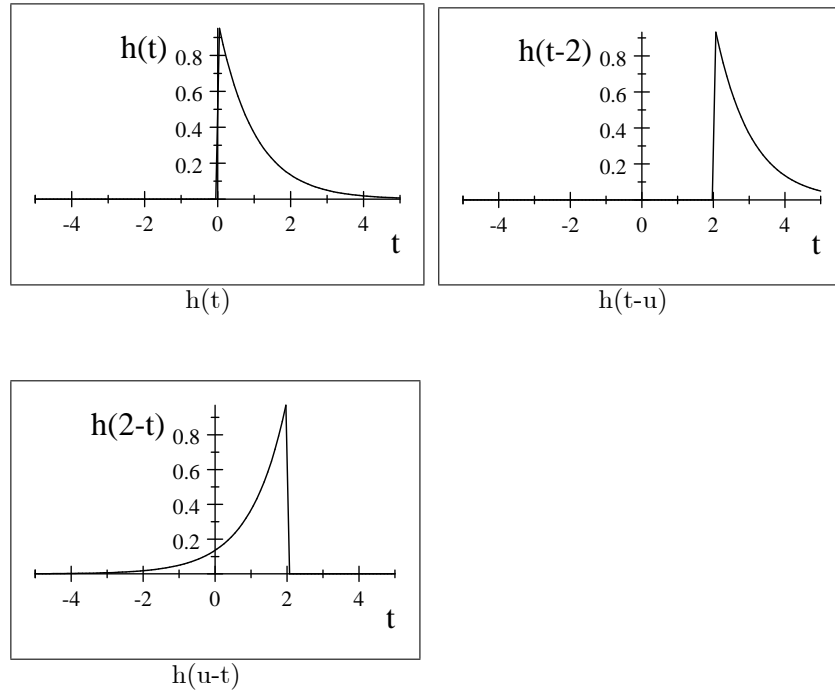
Nous allons expliciter le fonctionnement de l'opérateur "convolution" en partant de l'exemple présenté précédemment. Pour le système "réservoir", on peut montrer que la réponse impulsionnelle est donnée par l'équation

$$h(t) = \begin{cases} ke^{-akt} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En effet, il s'agit de la limite quand $\Delta \rightarrow 0$ de la réponse à un signal carré d'amplitude $\frac{1}{\Delta}$ et de durée Δ

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta a} (1 - e^{-akt}) - \frac{1}{\Delta a} (1 - e^{-ak(t-\Delta)}) \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta a} \lim_{\Delta \rightarrow 0} (e^{-akt} (e^{ak\Delta} - 1)) \\
 &= e^{-akt} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{ak\Delta} - 1}{\Delta a}
 \end{aligned}$$

Le développement limité de l'exponentiel permet d'obtenir le résultat annoncé.



En considérant les courbes ci-dessus on constate que la "fenêtre temporelle glissante d'intégration" est bien représentée par $h(u-t)$. Cette fenêtre "glisse" au cours du calcul devant le signal et vient le pondérer (figure 1.4).

Si l'entrée est un échelon d'amplitude 1 on retrouve le schéma de calcul de la figure 1.3 et l'équation de convolution 1.3 devient

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^{+\infty} h(u)e(t-u)du \\
 &= \int_0^{+\infty} ke^{-aku}e(t-u)du \\
 &= \int_0^t ke^{-aku}du
 \end{aligned}$$

1.3. RÉPONSE D'UN SLI À PARTIR DU PRODUIT DE CONVOLUTION 9

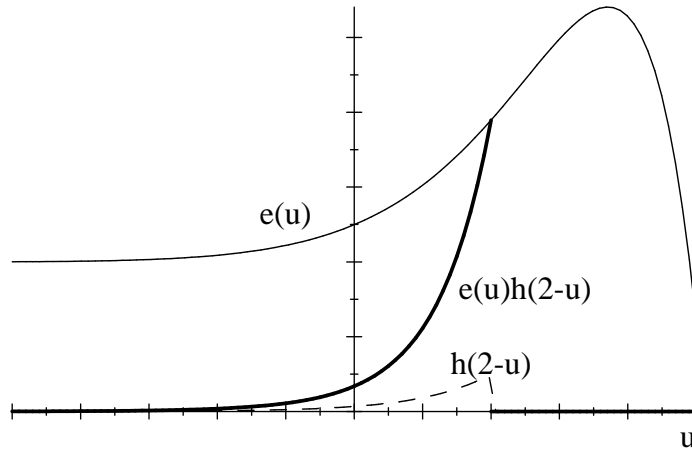


Figure 1.4: Signaux intervenant dans le calcul du produit de convolution à $t=2$

Donc

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{k}{-ak} [e^{-aku}]_0^t \\ &= -\frac{1}{a}(e^{-akt} - 1) \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat déjà obtenu en 1.1.

1.3.2 Propriétés du produit de convolution

Nous résumons ci-après les propriétés du produit de convolution pour $s(t) = e * h(t)$

Linéarité:

$$\begin{aligned} \alpha e(t) &\rightarrow \alpha s(t) \quad \forall \alpha, t \\ e(t) = e_1(t) + e_2(t) &\rightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad \forall t \end{aligned}$$

Commutativité:

$$e * h(t) = h * e(t)$$

Distributivité par rapport à l'addition:

$$h * (e_1 + e_2)(t) = h * e_1(t) + h * e_2(t)$$

Associativité:

$$e * (h * f)(t) = (e * h) * f(t) = e * h * f(t)$$

Elément neutre: l'élément neutre du produit de convolution est la distribution (cf cours de traitement du signal) de Dirac. En effet une des propriétés de la distribution de Dirac est que

$$\delta(t - u) = 0 \text{ si } t \neq u$$

donc

$$e(u)\delta(t - u) = e(t)\delta(t - u) \quad \forall t, u$$

donc le calcul de la convolution s'écrit

$$\begin{aligned} e * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(u)\delta(t - u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\delta(t - u)du \\ &= e(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - u)du \end{aligned}$$

Une autre propriété de la distribution de Dirac est que son intégrale est égale à l'unité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Donc finalement

$$e * \delta(t) = \delta * e(t) = e(t)$$

Problème de l'inversion: l'inversion du produit de convolution est en général un problème insoluble, sauf si certaines conditions sont respectées. Cette inversion permet de déterminer l'entrée d'un système si on connaît la sortie (problème inverse). Ni l'existence, ni l'unicité de la solution ne sont garanties dans le cas général.

1.4 Réponse d'un SLI à un signal sinusoïdal

1.4.1 Réponse à une exponentielle complexe

Si l'entrée d'un SLI de réponse impulsionnelle connue $h(t)$ est un signal (abstrait) représenté par une exponentielle complexe $e(t) = e^{j\omega t}$, la sortie sera donnée par

$$\begin{aligned} s(t) &= e * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{j\omega(t-u)} du \\ s(t) &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-j\omega u} du \end{aligned}$$

L'intégrale apparaissant dans le deuxième membre est une fonction complexe dont la forme ne dépend que de la réponse impulsionnelle du système, on l'appelle la **fonction de transfert** du système

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-j\omega u} du$$

La réponse à une exponentielle complexe est donc

$$s(t) = H(\omega) e^{j\omega t}$$

C'est donc une exponentielle complexe dont l'amplitude (complexe) est donnée par la fonction de transfert du SLI. La réponse impulsionnelle est une fonction réelle donc

$$H(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{j\omega u} du = H^*(\omega)$$

On exprime souvent la fonction de transfert en faisant apparaître son module et son argument

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi}$$

Ces résultats retrouvent un sens concret si on s'intéresse à une entrée sinusoïdale.

1.4.2 Réponse à une entrée sinusoïdale

L'entrée dans ce cas peut s'écrire

$$e(t) = E \sin \omega t$$

$$e(t) = E \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right)$$

Comme le système est linéaire, la sortie s'exprime

$$s(t) = \frac{E}{2j} (H(\omega) e^{j\omega t} - H(-\omega) e^{-j\omega t})$$

soit

$$s(t) = E |H(\omega)| \left(\frac{e^{j\varphi} e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}}{2j} \right)$$

donc

$$s(t) = |H(\omega)| E \sin(\omega t + \varphi)$$

La réponse d'un SLI à une entrée sinusoïdale est donc sinusoïdale d'amplitude proportionnelle au module de la fonction de transfert et dont le déphasage avec l'entrée est égale à la phase de la fonction de transfert. Ce résultat très important est la base de toutes les équations décrivant le fonctionnement des circuits électriques linéaires.

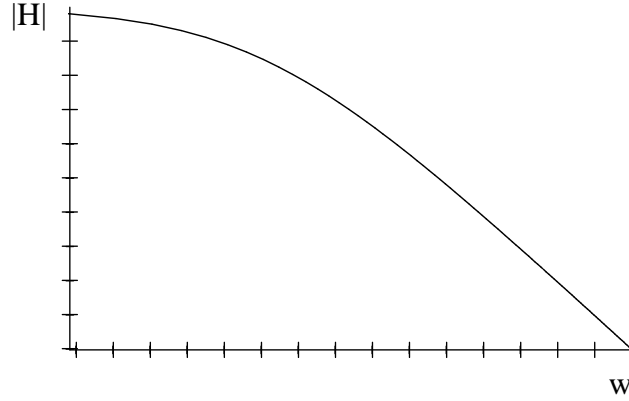


Figure 1.5: Module de la fonction de transfert du réservoir pour $a=2$ et $k=1$ (échelles logarithmiques)

Si on reprend l'exemple du système réservoir

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \int_0^{+\infty} k e^{-aku} e^{-j\omega u} du \\
 &= k \int_0^{+\infty} e^{-(j\omega+ak)u} du \\
 &= \frac{-k}{j\omega + ak} \left[e^{-(j\omega+ak)u} \right]_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

L'exponentielle est nulle à la borne supérieure, car l'exponentielle complexe est bornée et elle est multipliée par un terme nul ($e^{-\infty}$) donc la fonction de transfert du réservoir s'écrit

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{k}{ak + j\omega} \\
 H(\omega) &= \frac{1/a}{1 + j\frac{\omega}{ak}}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 |H(\omega)| &= \frac{1/a}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2}}} \\
 \tan \varphi &= -\frac{\omega}{ak}
 \end{aligned}$$

Chapter 2

La corrélation des signaux

2.1 Introduction

Notion analogue à la corrélation statistique, permettant de mesurer la "ressemblance" entre deux signaux.

2.2 Représentation des signaux

2.2.1 Signaux continus, signaux déterministes, signaux aléatoires

Un signal physique réel dépendant du temps est représenté par une fonction scalaire $s(t)$. Si elle est de carré intégrable, comme la plupart des fonctions représentant des signaux physiques, alors:

$$s(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

Si elle est localement sommable, on pourra utiliser la distribution qu'elle définit.

L'**énergie** totale d'un signal déterministe est définie arbitrairement par le carré de sa norme:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)s(t)dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

$$E = \langle s, s \rangle$$

Sa **puissance** à l'instant t est définie par:

$$P = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} s^*(u)s(u)du$$

Le signal **stochastique continu** représente la sortie d'un processus stochastique (aléatoire) continu X dont une réalisation ω est modélisée par une fonction continue de carré intégrable notée $x(t; \omega)$. Il faut bien noter que le processus n'est caractérisé entièrement que par l'ensemble de toutes ses réalisations. Dans la pratique seules quelques réalisations sont accessibles à l'expérience et, souvent, on ne dispose que d'une réalisation. Cette fonction, pour un instant t donné est une **variable aléatoire**, elle associe, à l'instant t , à un événement (une réalisation) une valeur numérique. Pour un instant t donné, la valeur dépend de la réalisation $\omega \subset \Omega$ considérée. Pour une réalisation donnée la fonction est une fonction temporelle et elle peut être traitée avec les mêmes outils mathématiques qu'un signal déterministe.

Exemples de processus stochastiques: bruit électrique dans une résistance (la variable aléatoire est dans ce cas la tension aux bornes de la résistance), instants d'arrivées des appels téléphoniques sur une ligne à haut débit (processus ponctuel: distribution aléatoire de points sur l'axe temporel), nombres d'appels en cours transistants à chaque instant sur une ligne à haut débit, bruit électromagnétique cosmique, hauteur des vagues, cours boursiers ...

2.2.2 Signaux discrets, signaux déterministes, signaux aléatoires

On parlera de signal déterministe à temps discret ou indifféremment de signal numérique (à une variable ou monodimensionnel) pour désigner une suite numérique représentée par une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} :

$$x[n] \in \mathbb{R} \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Nous ne considérerons, pour l'essentiel, que des signaux réels. Le cas des signaux complexes ne présente pas de difficultés mathématiques particulières et nous nous permettrons de généraliser directement les propriétés quand ce sera nécessaire (signaux issus de la transformée de Fourier discrète, par exemple: chapitre ??).

Remark 1 $x[n]$ n'est pas défini si $n \notin \mathbb{Z}$! Mais $x[n]$ varie continûment dans \mathbb{R} . La discrétisation de $x[n]$, nécessaire pour la mise en oeuvre pratique des algorithmes, est menée dans l'opération de quantification.

Par analogie avec le cas des signaux continus on nommera énergie d'un signal discret la quantité positive définie par:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (2.2)$$

Si l'énergie est finie la suite appartient à l'espace des suites d'énergie finie

$$x[n] \in l^2(\mathbb{R})$$

Sa puissance à l'instant k est définie par

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=k-N}^{k+N} |x[n]|^2$$

Un **processus aléatoire discret** X sera décrit par ses propriétés statistiques, en particulier par sa loi de probabilité et par ses **moments**. L'étude statistique expérimentale sera menée à travers ses réalisations $x_i[n]$.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux processus **ergodiques** et le plus souvent **stationnaires** (au moins au second ordre).

Un processus aléatoire X est ergodique si avec une probabilité de 1 tous ses moments statistiques peuvent être déterminés à partir de n'importe laquelle de ses réalisations. Dans ce cas, les moments temporels sont égaux aux moments statistiques. Dans la pratique courante et en particulier dans le cadre de ce cours, on se contentera des moments du 1^{er} et du 2nd ordre.

2.3 Intercorrélation

Dans de nombreuses applications du traitement du signal il est nécessaire de comparer des signaux entre eux, en particulier pour déterminer un degré de ressemblance ou pour synchroniser des horloges. La méthode permettant de résoudre ce problème de la façon la plus directe la plus directe consiste à calculer le produit d'intercorrélation. Ce produit est l'intégrale du produit des deux signaux. On peut démontrer que ce produit d'intercorrélation passe par un maximum (à énergie constante) quand les deux signaux sont identiques et parfaitement synchronisés. Pour simplifier la présentation commençons par le cas des signaux discrets.

Pour des signaux déterministes **discrets** le produit d'intercorrélation dépend du décalage k entre les deux signaux et il s'écrit

$$C_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-k]$$

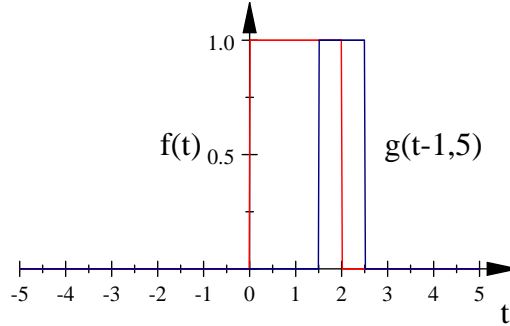
On peut traiter l'exemple de deux signaux carrés de largeurs différentes:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$y[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq n \leq 1+k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Figure 2.1: $f(t)$ et $g(t-1,5)$

Le calcul pour $C_{xy}[2]$ est résumé dans un tableau

n	\dots	-2	-1	0	1	2	3	4	5	\dots
$x[n]$		0	0	0	1	1	1	0	0	0
$y[n-2]$		0	0	0	0	0	1	1	0	0
$x[n]y[n-2]$		0	0	0	0	0	1	0	0	0

et donc $C_{xy}[2] = 1$. Si le calcul est mené de la même façon pour différentes valeurs de k , on obtient

$$C_{xy}[k] = \begin{array}{cccccccc} & k & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le **produit de corrélation** ou **intercorrélation** de deux signaux **continus** déterministes est défini par

$$C_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-t)du$$

Reprenons le même exemple que précédemment (voir figure 2.1).

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'intégrale doit être calculée par morceaux

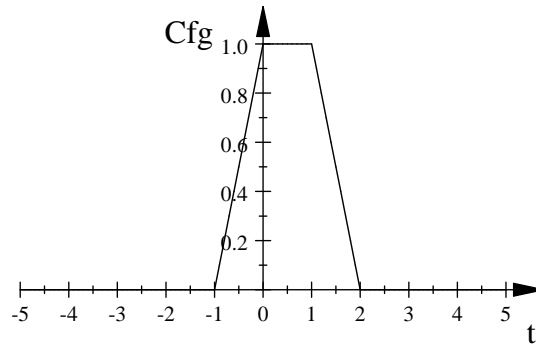


Figure 2.2: Produit d'intercorrélation pour l'exemple ci-dessus.

$$\left\{ \begin{array}{ll} t < -1 & C_{fg}(t) = 0 \\ -1 < t < 0 & C_{fg}(t) = \int_0^{t+1} du = t + 1 \\ 0 < t < 1 & C_{fg}(t) = \int_t^{t+1} du = 1 \\ 1 < t < 2 & C_{fg}(t) = \int_t^2 du = 2 - t \\ 2 < t & C_{fg}(t) = 0 \end{array} \right.$$

Ce résultat est illustré par la figure 2.2.

Le **produit d'intercorrélation** peut-être rapproché du produit de convolution

$$C_{fg}(t) = f * g^-(t) \quad \text{avec } g^-(t) = g(-t)$$

Le produit d'intercorrélation est donc égal au produit de convolution avec le signal retourné. Ce produit, contrairement au produit de convolution, n'est

donc pas commutatif:

$$\begin{aligned}
 C_{gf}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(u-t)du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau+t)f(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(\tau+t)d\tau \\
 C_{gf}(t) &= C_{fg}(-t)
 \end{aligned}$$

2.4 Autocorrélation

Quant à l'**autocorrélation** elle s'écrit

$$C_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(u-t)du \quad (2.3)$$

$$C_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(u+t)du \quad (2.4)$$

La fonction d'autocorrélation est donc toujours une fonction paire.

$$C_{ff}(t) = C_{ff}(-t)$$

L'autocorrélation d'une fonction périodique est une fonction périodique de même période.

L'autocorrélation en 0 est égale à l'énergie du signal.

$$C_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(u)du = E$$

2.5 Propriété fondamentale

Considérons une combinaison linéaire de deux signaux déterministes réels modélisés par des fonctions de u . t est un paramètre constant dans ce qui suit, de même que b :

$$f(u) + bg(u-t)$$

Calculons son énergie

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(u) + bg(u-t)][f(u) + bg(u-t)]du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(u)du + b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(u-t)g(u-t)du + 2b \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-t)du \\ &\Rightarrow C_{ff}(0) + b^2 C_{gg}(0) + 2b C_{fg}(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Si on considère cette expression comme une équation du 2^{ème} degré en b , elle est positive ou nulle et son discriminant est donc négatif ou nul car elle n'a pas de racine réelle en dehors des racines doubles:

$$C_{fg}^2(t) - C_{ff}(0) \cdot C_{gg}(0) \leq 0 \quad (2.5)$$

Donc

$$|C_{fg}(t)| \leq \sqrt{C_{ff}(0) \cdot C_{gg}(0)} \quad (2.6)$$

L'intercorrélation est donc bornée par le produit des énergies des deux signaux. Ce qui, dans le cas de l'autocorrélation donne

$$|C_{ff}(t)| \leq |C_{ff}(0)| \quad (\text{énergie du signal})$$

Donc l'autocorrélation passe par un maximum en $t = 0$. On parle du **pic de corrélation**, il est situé à la meilleure coïncidence des signaux.

On normalise souvent l'intercorrélation par l'énergie des signaux, de sorte que l'intercorrélation soit toujours inférieure ou égale à 1.

$$\frac{|C_{fg}(t)|}{\sqrt{E_f \cdot E_g}} \leq 1 \quad (2.7)$$

2.6 Intercorrélation du bruit blanc et applications de l'intercorrélation

2.6.1 Détermination de la réponse impulsionnelle d'un SLI

Pour un SLI de réponse impulsionnelle $h(t)$ nous avons vu que

$$s(t) = e * h(t)$$

Donc l'intercorrélation entre l'entrée et la sortie s'écrit

$$C_{es}(t) = e * s^-(t)$$

avec $s^-(t) = s(-t)$ donc

$$s^-(t) = (e * h)^-(t)$$

$$C_{es}(t) = e * (e * h)^-(t)$$

or $(e * h)^- = e^- * h^-$

$$\begin{aligned} C_{es}(t) &= (e * e^-) * h^-(t) \\ C_{es}(t) &= C_{ee}(t) * h^-(t) \end{aligned}$$

Si le signal d'entrée est choisi de sorte que son autocorrélation soit égale à la distribution de Dirac (impulsion), $C_{ee}(t) = \delta(t)$, alors la réponse impulsionnelle (retournée dans le temps) est égale à l'intercorrélation entre l'entrée et la sortie du SLI:

$$C_{es}(t) = h^-(t)$$

Nous verrons (cours sur la transformation de Fourier) que l'**autocorrélation du bruit blanc est un Dirac**. Cette propriété peut même être utilisée comme définition du bruit blanc. En appliquant un bruit blanc à l'entrée d'un SLI et en mesurant l'intercorrélation (l'appareil de mesure permettant cette opération est un **corrélateur**) entre l'entrée et la sortie on obtient la **réponse impulsionnelle** du système. Cette méthode de mesure est plus facile et plus efficace que la méthode directe qui consisterait à appliquer en entrée une approximation de l'impulsion de Dirac.

2.6.2 Application à la synchronisation de systèmes

Pour cette application, on calcule l'autocorrélation entre un signal émis par le système synchronisant, en général une séquence pseudo-aléatoire dont la fonction d'autocorrélation est une impulsion unité, et le même signal généré par le système à synchroniser.

$$C_{ee}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e[n]e[n-k] = \delta[n]$$

Le pic d'intercorrélation apparaît au rang de synchronisme des deux systèmes. Si la séquence de référence a pour fonction d'autocorrélation une impulsion unité, le pic de synchronisation est une impulsion unité apparaissant en sortie quand les deux systèmes sont synchrones.

2.6.3 Application à la détection/reconnaissance de signaux noyés dans le bruit

On calcule l'intercorrélation entre le signal d'entrée et le signal à reconnaître.

$$e(t) = x(t) + b(t)$$

$$\begin{aligned} C_{ex}(t) &= e * x^-(t) \\ C_{ex}(t) &= C_{xx}(t) + C_{bx}(t) \\ C_{ex}(0) &= E_x + C_{bx}(0) \end{aligned}$$

2.6. INTERCORRÉLATION DU BRUIT BLANC ET APPLICATIONS DE L'INTERCORRÉLATION²¹

L'intercorrélation à l'origine est maximum si le signal et le bruit sont décorrélés. Ce qui est le cas si le bruit est un bruit blanc indépendant du signal. Cette propriété est à l'origine de la notion de **filtre adapté**.

Chapter 3

Modulation d'amplitude

3.1 Problématique

Transmettre l'information a toujours été une problématique majeure, les enjeux en sont multiples: économiques, stratégiques, culturels... Les "traiteurs de signaux" ont ainsi développé des techniques appropriées de plus en plus performantes. Pour être transmise, l'information doit être formalisée, écrite ou codée. Nous nous intéresserons à l'information codée sous forme d'une fonction (monovariante pour simplifier) ou d'une séquence numérique indexée par un seul indice. Les exemples pratiques actuels sont nombreux. On peut citer, la transmission du son par voie hertzienne, par fibre optique, la transmission du signal vidéo ou encore de données numériques sur la toile. Il faut dans tous les cas envisager la transmission par un canal commun (le même médium) de plusieurs signaux simultanément (téléphonie cellulaire par exemple, différentes chaînes de télévision). Le canal commun, le médium, est variable: fil conducteur de l'électricité, ondes hertziennes (la lumière en fait partie), ondes sonores. Il faut disposer de procédés permettant d'inscrire l'information sur le canal au niveau de l'émetteur et ensuite, au niveau du récepteur d'extraire cette information. L'inscription du signal fait en général appel à un procédé appelé **modulation**, l'extraction, dans ce cas passe par une **démodulation**. Les premiers procédés de modulation développés sont la modulation d'amplitude et ses variantes (bande latérale unique, avec et sans porteuse) puis les techniques de modulation de fréquence et de phase sont apparues. Très récemment on a introduit les modulations très large bande qui ont révolutionné le **multiplexage** des signaux.

3.2 La modulation d'amplitude

La technique de modulation d'un signal permet d'"inscrire" sur une porteuse, en général sinusoïdale, de pulsation ω_p , un signal quelconque $s(t)$ porteur d'information. La méthode la plus simple est la modulation d'amplitude, dans ce cas l'amplitude

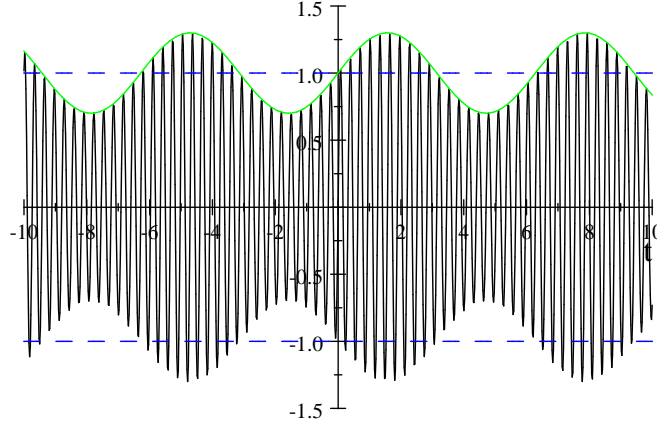


Figure 3.1: Exemple de signal modulé par un signal sinusoïdal avec un indice de modulation $m = 0,3$

de la porteuse est souvent une fonction linéaire du signal (voir figure 3.1):

$$x(t) = (1 + m \cdot s(t)) \sin \omega_p t$$

Le paramètre m est le facteur de modulation, il est choisi en fonction de l'amplitude maximum du signal $s(t)$ pour ne pas risquer de "surmoduler" (voir figure 3.2), ce qui pourrait conduire à des distortions du signal après démodulation.

Si le signal modulant l'information, est sinusoïdal (exemple sans intérêt pratique réel), la détermination des propriétés du signal modulée peut être menée avec des moyens mathématiques élémentaires:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sin \omega t \\ x(t) &= \sin \omega_p t + m \cdot \sin \omega t \sin \omega_p t \\ x(t) &= \sin \omega_p t + \frac{m}{2} [\cos(\omega - \omega_p)t - \cos(\omega + \omega_p)t] \end{aligned}$$

Le signal modulé contient ainsi trois composantes sinusoïdales de pulsations ω_p , $\omega - \omega_p$, $\omega + \omega_p$. Ces composantes sont appelées respectivement porteuse, bande latérale inférieure et bande latérale supérieure. On peut les représenter dans un diagramme symbolique par un "spectre" de raies (voir figure 3.3). L'information inscrite dans les bandes latérales ne porte donc qu'une fraction de l'énergie totale du signal modulé, la porteuse, ne porte en effet aucune information. Nous verrons dans le cours sur la décomposition en série de Fourier que la puissance du signal est égale à la somme des puissances de ses composantes sinusoïdales

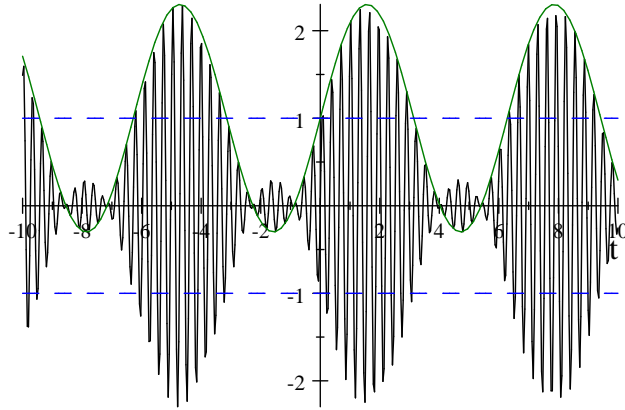


Figure 3.2: Exemple de signal modulé par un signal sinusoïdal avec un indice de modulation $m = 1,3$

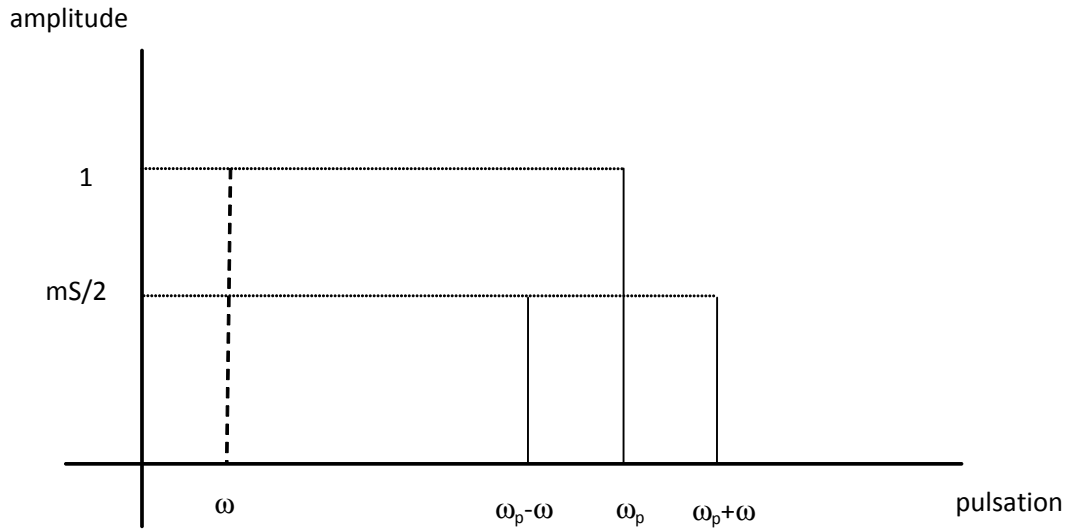


Figure 3.3: Spectre d'un signal modulé en amplitude par une sinusoïde

(théorème de Parseval), la puissance du signal modulé sera donc:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{m.}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{m.}{2}\right)^2}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} + \frac{m^2}{4}$$

Cette puissance sera supérieure à la puissance initiale de la porteuse (attention lors de la conception de l'émetteur) et elle dépend du facteur de modulation m .

Dans le cas général, on trouve un résultat analogue, mais le calcul s'appuie sur propriétés de la transformée de Fourier qui sera vue dans un autre cours. On donne ci-après le détail de ce calcul qui fait appel au théorème de Plancherel; celui-ci permet de déterminer facilement la transformée de Fourier du signal modulé:

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(2\pi\delta + m\hat{s}) * \frac{\pi}{j} [\delta_{\omega_0} - \delta_{-\omega_0}](\omega)$$

$$\hat{x}(\omega) = -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{m}{2j} [\hat{s}(\omega - \omega_0) - \hat{s}(\omega + \omega_0)]$$

On retrouve les raies correspondant à la porteuse (sinusoïde pure de pulsation ω_0) et le spectre du signal modulant translaté autour de la porteuse dans les deux bandes latérales. Prenons pour illustrer ce résultat l'exemple d'un signal modulant à bande passante limitée d'enveloppe gaussienne:

$$s(t) = e^{-t^2} \sin 15t$$

La transformée de Fourier du signal modulant est déterminée également par le

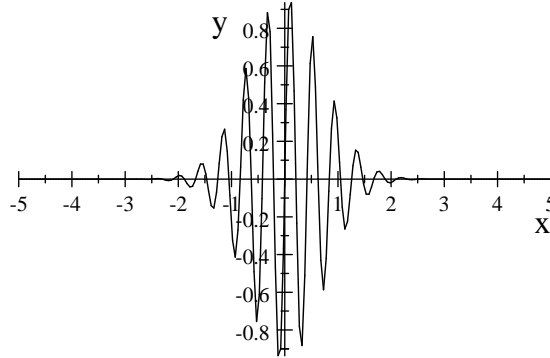


Figure 3.4: Exemple de signal modulant de bande passante limitée

théorème de Plancherel:

$$\hat{s}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} * \frac{\pi}{j} [\delta_{15} - \delta_{-15}](\omega)$$

$$\hat{s}(\omega) = \frac{\pi^{1/2}}{2j} \left[e^{-\frac{(\omega-15)^2}{4}} - e^{-\frac{(\omega+15)^2}{4}} \right]$$

Le signal modulé avec un facteur de modulation de 1/2 et une porteuse de

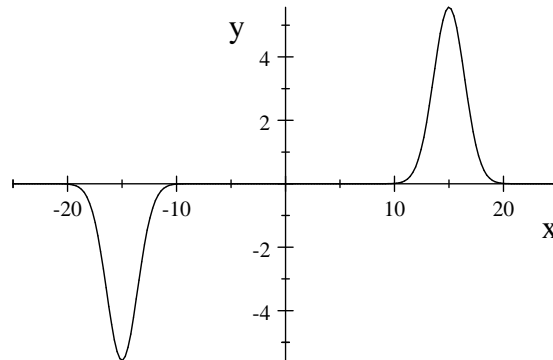


Figure 3.5: Partie imaginaire de la transformée de Fourier du signal modulant

à une vitesse de rotation de 50 rd/s s'écrira (voir figure 3.6):

$$x(t) = \left(1 + \frac{1}{2}e^{-t^2} \sin 15t\right) \sin 100t$$

Le spectre du signal modulé est donné par (voir figure 3.7):

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2j} [\delta(\omega - 100) - \delta(\omega + 100)] - \frac{\pi^{3/2}}{4} \left[e^{-\frac{(\omega-115)^2}{4}} - e^{-\frac{(\omega-85)^2}{4}} - e^{-\frac{(\omega+85)^2}{4}} + e^{-\frac{(\omega+115)^2}{4}} \right]$$

On repère les bandes latérales autour de $100 \pm 15 \text{ rd/s}$ et la porteuse à 100 rd/s dans un spectre qui est pair (il s'agit du module).

3.3 La démodulation d'amplitude

Il existe deux méthodes principales pour effectuer la démodulation d'un signal modulé en amplitude, une méthode non-linéaire faisant appel à un détecteur d'enveloppe et la détection synchrone qui utilise un circuit multiplieur.

3.3.1 Détecteur d'enveloppe

On utilise un circuit redresseur non-linéaire, en général une simple diode, qui permet d'extraire la partie positive du signal modulé (voir figure 3.8), on appelle ce circuit un **détecteur**. Un filtre passe-bas éliminera la composante haute fréquence et permettra d'extraire l'enveloppe du signal modulé (voir un exemple de schéma symbolique à la figure 3.10). Si le taux de modulation est inférieur ou égal à un, cette enveloppe est le signal modulant. Si le signal est surmodulé, une distorsion sera alors observée (voir figure 3.9) car c'est alors la valeur absolue du signal modulant qui est extraite.

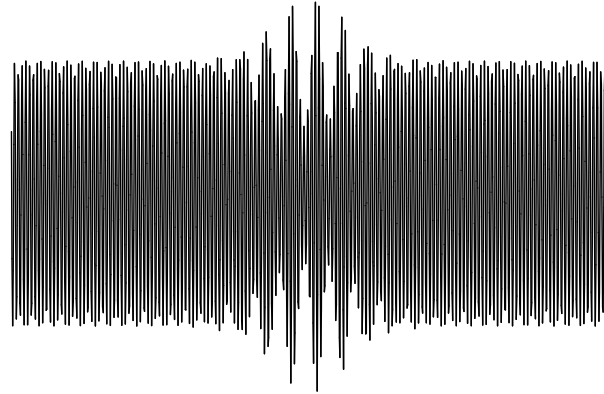


Figure 3.6: Signal modulé

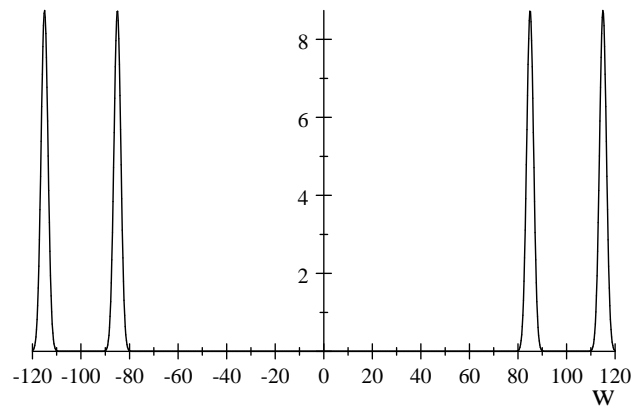


Figure 3.7: Module du spectre du signal modulé

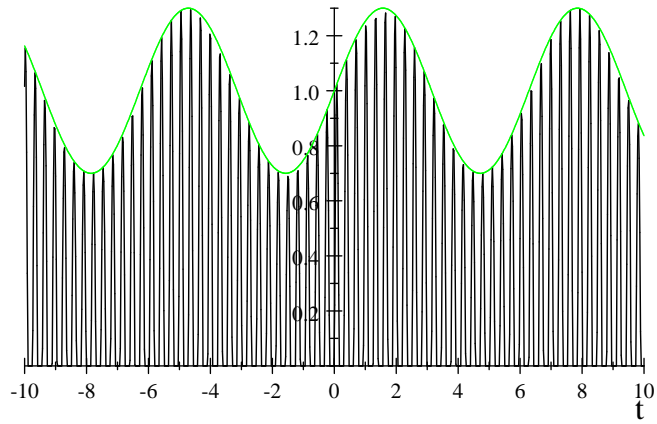


Figure 3.8: Partie positive du signal modulé et enveloppe (en vert)

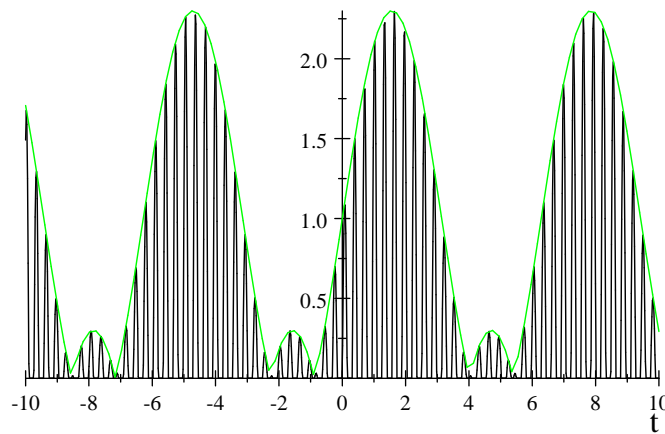


Figure 3.9: Détection d'un signal surmodulé

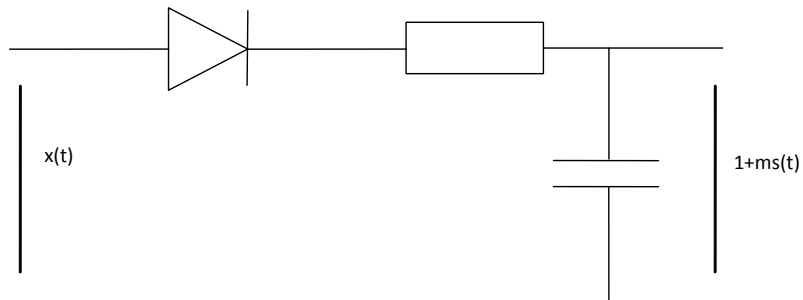


Figure 3.10: Détecteur d'enveloppe

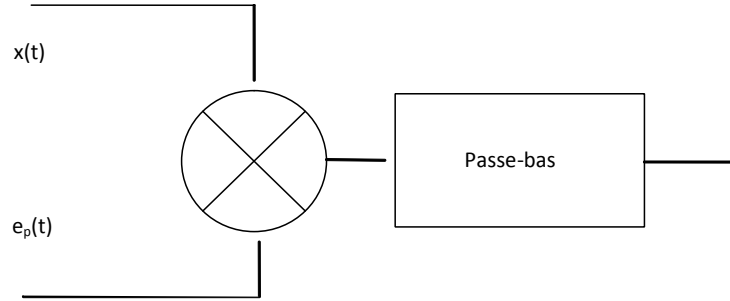


Figure 3.11: Détecteur synchrone

3.3.2 Détection synchrone

Il faut disposer dans le récepteur d'un signal synchronisé sur la porteuse: $e_p(t) = \sin \omega_p t$, ce signal est multiplié par le signal modulé reçu

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)e_p(t) = (1 + m.s(t)) \sin^2 \omega_p t \\ &= (1 + m.s(t)) \frac{1 - \cos 2\omega_p t}{2} \end{aligned}$$

Un simple filtre passe-bas élimine la composante à la pulsation $2\omega_p$ et ne laisse passer que la composante continue qui fournit directement, à un offset et à un facteur de gain près, le signal modulant $s(t)$ (voir le schéma symbolique à la figure 3.11).

$$\frac{1 + m.s(t)}{2}$$

3.4 Les modulations angulaires (de fréquence et de phase)

Il est également possible d'inscrire le signal que l'on souhaite transmettre sur la variable "fréquence" de la porteuse. Si cette fréquence doit varier, il convient de définir sa valeur instantanée. Pour cela nous faisons apparaître la phase instantanée et nous écrivons la porteuse sous la forme:

$$x(t) = \sin \theta(t)$$

La **pulsation instantanée** $\omega(t)$ sera définie comme la dérivée de la **phase instantanée** $\theta(t)$:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

cette définition fait coïncider la pulsation instantanée avec ω_0 dans le cas classique d'une pulsation constante, car alors $\theta(t) = \omega_0 t$. Si la pulsation est modulée

3.4. LES MODULATIONS ANGULAIRES (DE FRÉQUENCE ET DE PHASE)31

par un signal $s(t)$ alors on aura:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + k.s(t)$$

et donc:

$$\theta(t) = \omega_0 t + k. \int_{-\infty}^t s(u) du$$

Le signal modulé en fréquence s'écrira donc:

$$x(t) = \sin \left(\omega_0 t + k. \int_{-\infty}^t s(u) du \right)$$

Si on prend l'exemple du signal modulant cosinusoidal (supposé arbitrairement nul à $-\infty$):

$$s(t) = \cos \Omega t$$

le coefficient k sera noté $\Delta\omega$ il correspond à l'amplitude de l'excursion en fréquence instantanée du signal modulé (le swing) qui s'écrit alors (voir figure 3.4):

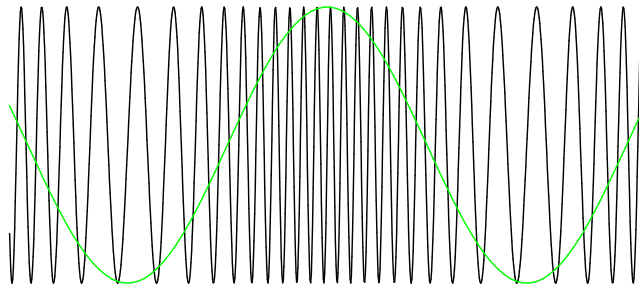
$$x(t) = \sin \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} . \sin \Omega t \right)$$

Le quotient $\frac{\Delta\omega}{\Omega}$ caractérise la profondeur de modulation on l'appelle **indice de modulation**:

$$m = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$$

et alors:

$$x(t) = \sin (\omega_0 t + m. \sin \Omega t)$$



Exemple de signal modulé en fréquence avec un indice de modulation de 10.
Le signal modulant est superposé.

En **modulation de phase**, c'est la phase instantanée $\theta(t) = \omega_0 t$ qui sera modulée par le signal modulant:

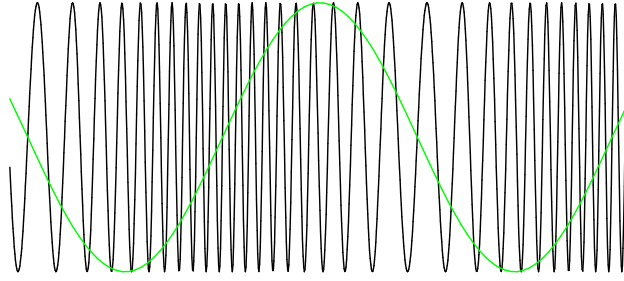
$$\theta(t) = \omega_0 t + k.s(t)$$

k est toujours appelé **indice de modulation**. Il apparaît que ce procédé ne diffère pas fondamentalement du précédent, il suffit de remplacer le signal modulant par sa dérivée pour passer de la modulation de fréquence à la modulation de phase. Le signal modulé en phase s'écrit (voir figure 3.4):

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + k.s(t))$$

et la pulsation instantanée est dans ce cas:

$$\omega = \omega_0 + k.\frac{ds(t)}{dt}$$



Exemple de signal modulé en phase avec un indice de modulation de 10. Le signal modulant est superposé.

L'analyse fréquentielle des signaux modulés en fréquence ou en phase est plus difficile que celle des signaux modulés en amplitude car elle fait appel à des fonctions spéciales, les fonctions de Bessel.

Fonctions de Bessel: on peut montrer en particulier les résultats suivants:

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\theta]$$

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta)$$

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos(2n\theta)$$

$$\sin(x \cos \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\theta]$$

3.4. LES MODULATIONS ANGULAIRES (DE FRÉQUENCE ET DE PHASE)33

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n définie pour les ordres entiers par le développement en série suivant:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

Si x est petit, on peut ne conserver que le premier terme de la série et:

$$J_n(x) \simeq \frac{1}{2^n n!} x^n$$

Ces relations permettent de déterminer les coefficients de la décomposition en séries de Fourier d'un signal modulé en fréquence par un signal sinusoïdal. En effet ce dernier peut s'écrire:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(\omega_0 t + m \cdot \sin \Omega t) \\ x(t) &= \sin \omega_0 t \cos(m \cdot \sin \Omega t) + \cos \omega_0 t \sin(m \cdot \sin \Omega t) \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, il vient:

$$\begin{aligned} x(t) &= J_0(m) \sin \omega_0 t \\ &+ J_1(m) [\sin(\omega_0 + \Omega)t - \sin(\omega_0 - \Omega)t] \\ &+ J_2(m) [\sin(\omega_0 + 2\Omega)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega)t] \\ &+ J_3(m) [\sin(\omega_0 + 3\Omega)t - \sin(\omega_0 - 3\Omega)t] \\ &+ J_4(m) [\sin(\omega_0 + 4\Omega)t + \sin(\omega_0 - 4\Omega)t] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Le spectre est donc composé d'un nombre infini de raies qui se répartissent autour de la porteuse à des écarts multiples de la fréquence du signal de modulation: $\omega_0 \pm k\Omega$. L'amplitude de ces raies ne diminue pas en général de façon régulière quand k augmente. Pour $m = 5$ on a par exemple:

$J_0(5)$	$J_1(5)$	$J_2(5)$	$J_3(5)$	$J_4(5)$	$J_5(5)$	$J_6(5)$	$J_7(5)$	$J_8(5)$	$J_9(5)$
-0.177	-0.132	0,04	0,36	0,39	0,26	0,13	0,05	0,02	0,005

D'une façon générale, cependant, on peut admettre que suivant la **règle** empirique de **Carson**, l'énergie d'un signal modulé en fréquence est contenue dans une bande de fréquence centrée sur la porteuse et de largeur totale:

$$B = 2(\Delta\omega + \Omega)$$

Si l'indice de modulation est faible:

$$\begin{aligned} m &\ll 1 \\ \Delta\omega &\ll \Omega \end{aligned}$$

on peut alors négliger les fonctions de Bessel d'ordre supérieur à 1 et le spectre ne contient plus alors que la porteuse et deux raies latérales comme dans le cas

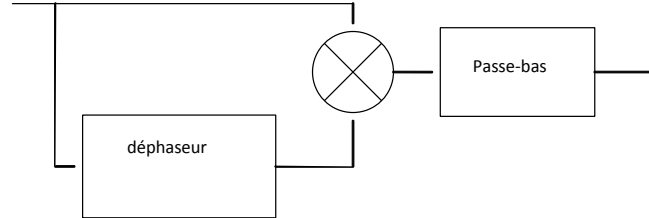


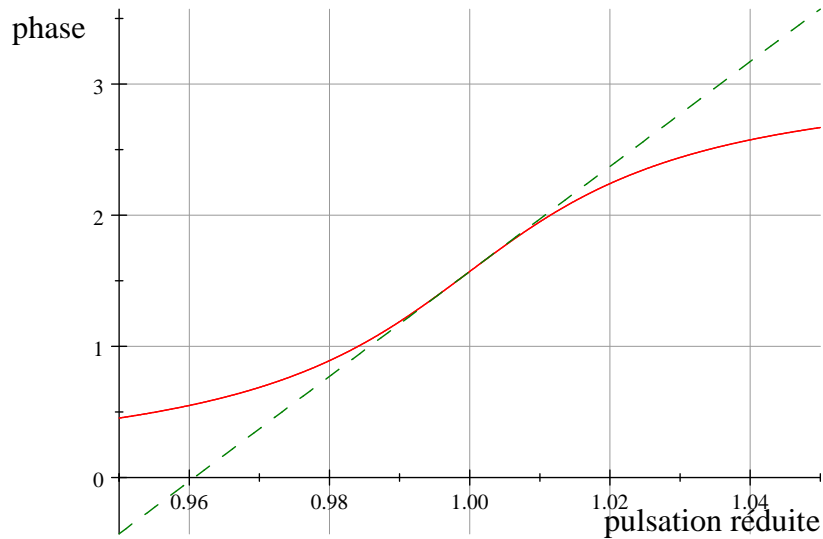
Figure 3.12: Démodulateur à coïncidence

de la modulation d'amplitude. Ce type de modulation est appelé **modulation de fréquence à bande étroite**. Ce procédé de modulation ne permet pas toutefois de profiter des avantages de la modulation angulaire, en particulier la résistance aux interférences est très amoindrie. Le **phénomène de capture** est en effet très limité dans ce cas.

Il existe bien d'autres systèmes de modulation, parmi les modulations d'amplitude on peut citer la modulation sans porteuse ou encore la modulation à bande latérale unique (BLU), etc...

3.5 Démodulation de fréquence

La méthode la plus simple, mais pas la plus efficace, est d'utiliser un filtre linéaire dont la bande d'atténuation contient la fréquence de la porteuse pour transformer au niveau du récepteur les variations de fréquence du signal modulé en variations d'amplitude. Ce qui permet d'utiliser ensuite un démodulateur d'amplitude pour retrouver le signal modulant. Ce type de démodulation est appelée **démodulation non cohérente ou à discriminateur**. Les **démodulateurs cohérents ou synchrones** font appel à des circuits plus élaborés mais permettent des performances meilleures. On peut citer les boucles à verrouillage de phase (Phase Locked Loop, PLL), c'est la tension de correction de la boucle qui est utilisée comme sortie du détecteur dans ce cas. On retiendra aussi les démodulateurs à coïncidence dans lequel un circuit déphaseur permet de disposer du signal en quadrature, ce signal est multiplié au signal modulé. Un simple passe bas permet alors d'extraire le signal modulant (voir figure 3.12).

Figure 3.13: Réponse du déphaseur pour $Q=20$

Exemple de fonction de transfert de circuit déphaseur réel:

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = -\frac{C_1}{C + C_1} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_p} - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

On constate (voir figure 3.13) que la linéarité n'est qu'approximativement assurée que pour un indice de modulation faible ($m < 1\%$). Signalons que pour la bande radio FM, l'indice de modulation est très faible, car la profondeur est de l'ordre de 100 à 200 kHz ce qui correspond à un indice de modulation de 0,2%.