

# Détermination des équations implicites d'une supercyclide

Lionel Garnier, Sebti Foufou

LE2I, CNRS

UFR Sciences, Université de Bourgogne, BP 47870,

F-21078 Dijon Cedex, France

<lgarnier,sfoufou>@u-bourgogne.fr

**Résumé :** Les cyclides de Dupin sont des surfaces algébriques de faible degré. Elles possèdent l'avantage d'avoir une équation paramétrique et deux équations implicites équivalentes. De plus, leurs lignes de courbure sont des cercles ce qui permet de les utiliser pour effectuer des jointures  $\mathcal{G}^1$ -continues sans se soucier des problèmes de paramétrisation. La jointure avec les cyclides de Dupin s'effectue le long de ces lignes de courbure et l'on ne peut donc pas les utiliser pour la jointure de quadriques qui ne sont pas de révolution. Les supercyclides, qui sont obtenues comme images des cyclides de Dupin par une application affine ou projective, peuvent être utilisées pour assurer ce dernier type de jointures. L'équation paramétrique d'une supercyclide est très facile à obtenir puisque l'on a la matrice de transformation. Dans ce travail, nous montrons comment déterminer les deux équations implicites équivalentes d'une supercyclide connaissant la matrice de transformation.

## 1 Introduction

Les cyclides de Dupin ont été inventées par le mathématicien français Pierre Charles Dupin en 1822 [Dup22]. Elles avaient déjà été rencontrées par M. Moutard dans l'étude des surfaces annalagmatiques, surfaces invariantes par inversion [Mou04]. Leurs propriétés mathématiques ont été étudiées dans le siècle suivant leur découverte. Gaston Darboux montre qu'elles sont une sous-classe d'un type plus général de surfaces : les cyclides [Dar73, Dar17]. En 1868, Maxwell a montré que les cyclides de Dupin répondaient à la question suivante : trouver deux courbes telles que les courbes isométriques rencontrant ces courbes puissent être intersectées orthogonalement par une famille de surfaces [Max68]. En 1912, Forsyth [For12] a effectué deux travaux très importants : il a donné les équations projectives des cyclides de Dupin ; il a donné deux équations implicites équivalentes d'une cyclide de Dupin donnée. Ce dernier travail a été aussi fait par Darboux en calculant l'enveloppe de la famille des sphères à un paramètre définissant une cyclide de Dupin [Dar17]. Quelques propriétés géodésiques des cyclides de Dupin sont disponibles dans les ouvrages de Marcel Berger [BG92, Ber87].

Chadru *et al* ont donné une description géométrique des cyclides de Dupin en montrant la construction de celles-ci à partir de deux anticoniques (une ellipse et une hyperbole situées dans deux plans orthogonaux, dont tout sommet de l'une et foyer de l'autre), la détermination des cercles qui sont les lignes de courbures, la dégénérescence des cyclides de Dupin et les cyclides de Dupin parallèles [CDH88]. En 1990, Pratt détermine les cercles principaux des cyclides de Dupin, donne les propriétés utiles des cyclides pour obtenir des jointures  $\mathcal{G}^1$ -continues et les applique aux jointures cylindre-plan et sphère-cône en utilisant des fonctions trigonométriques. Il a également présenté un algorithme de conversion d'un morceau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier rationnel biquadratique [Pra90]. En 2002, nous montrons les limites de ce dernier algorithme. Nous en proposons une amélioration [GFN02c] et en développons un en utilisant des concepts barycentriques [GFN02a]. En 1993, Dutta *et al* développent une méthode de jointure cylindre-cylindre et cône-cône à l'aide de cyclides de Dupin [DMP93]. Shene a étudié la jointure entre deux cônes à l'aide des cyclides de Dupin [She98, She00].

Cependant, l'utilisation des cyclides de Dupin pour la jointure de quadriques qui ne sont pas de révolution n'est pas possible [GFN03]. Mike Pratt a introduit un nouveau type de surfaces construites à partir des cyclides de Dupin : les supercyclides. Une supercyclide est l'image d'une

cyclide de Dupin par une application affine ou projective [Pra94], et il compare les propriétés des supercyclides et des cyclides de Dupin. Nous avons nous même utilisés un type particulier de supercyclides pour effectuer des jointures de plans et de quadriques en n'utilisant que des concepts affines : les scaled cyclides [GFN02b, GFN03].

En partant d'une étude faite par Blutel en 1890 [Blu90], Degen a par la suite défini un type de surfaces englobant les supercyclides et leur a donné le nom de *double-Blutel surfaces* [Deg82, Deg86]. Dans [Deg94], Degen a formulé les équations paramétriques et les propriétés essentielles de ces surfaces. A partir de l'équation implicite d'une *double-Blutel surfaces*, M. Pratt donne l'équation implicite d'une supercyclide et montre que les cyclides de Dupin sont aussi des *double-Blutel surfaces* particulières [Pra97]. Cependant, le lien entre l'équation paramétrique d'une supercyclide et l'équation implicite n'est pas fait. Le but de cet article est de trouver les équations implicites d'une supercyclide lorsque l'on connaît la cyclide de Dupin et la matrice de transformation.

Dans un premier temps, nous faisons quelques rappels sur les espaces affines et projectifs, les cyclides de Dupin et les supercyclides. Ensuite, nous montrons comment de façon théorique on peut trouver les deux équations implicites équivalentes des supercyclides. Ensuite, nous donnons un exemple en utilisant une supercyclide projective et un exemple en utilisant une supercyclide affine : une scaled supercyclide. Enfin, nous proposons quelques perspectives.

## 2 Rappels mathématiques

### 2.1 Espace affine et espace projectif

#### 2.1.1 Définitions

**Espace affine** Un espace affine peut être défini de deux façons. La plus facile à comprendre consiste à définir un espace affine  $\mathcal{E}$  à partir d'un espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$  et d'une bijection de  $\mathcal{E}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$  vérifiant la relation de Chasles [Del00]. Une façon plus complexe, mais facilitant les propriétés projectives d'un espace affine, est de le définir à partir du groupe des translations de  $\vec{\mathcal{E}}$  opérant de façon simplement transitive sur  $\mathcal{E}$  [Tau00, NS82]. Concrètement, un espace affine usuel  $\mathcal{E}$  peut être défini par la donnée d'un espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$  et d'un point  $\Omega$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  : ainsi, on a  $\mathcal{E} = \Omega + \vec{\mathcal{E}}$  c'est à dire que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , il existe un et un seul vecteur  $\vec{u}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  tel que  $\vec{\Omega M} = \vec{u}$ . La dimension de  $\mathcal{E}$  est la dimension de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Espace projectif** Soit  $\vec{\mathcal{E}}$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ . On définit sur  $\vec{\mathcal{E}}$  la relation d'équivalence  $\sim$  :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2, \vec{u} \sim \vec{v} \iff \exists k \in \mathbb{K} \mid \vec{u} = k\vec{v} \quad (1)$$

L'espace projectif défini par  $\mathcal{E}$  est l'espace  $\mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}}) = \frac{\vec{\mathcal{E}}}{\sim}$ , de dimension  $n - 1$ . Les éléments de  $\vec{\mathcal{E}}$  sont des classes d'équivalences d'éléments homothétiques.

#### 2.1.2 Fermeture projective d'un espace affine

On considère un espace affine  $\mathcal{E}$ . Il est possible de trouver un espace vectoriel  $\vec{\mathcal{F}}$ , avec  $\dim(\vec{\mathcal{F}}) = \dim(\mathcal{E}) + 1$  et un hyperplan  $\mathcal{H}$  tels que  $\mathcal{E}$  soit  $\mathbb{P}(\vec{\mathcal{F}}) - \mathcal{H}$ .  $\mathcal{H}$  est appelé hyperplan à l'infini. En fait, on a  $\vec{\mathcal{F}} = \mathbb{K} \times \vec{\mathcal{E}}$ . L'espace  $\hat{\mathcal{E}} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \times \vec{\mathcal{E}})$  est appelé **fermeture projective ou clôture projective de l'espace affine  $\mathcal{E}$** .

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées du point  $A$  de  $\mathcal{E}$ , on appelle coordonnées homogènes de  $A$  tout  $n + 1$ -uplet  $(x_0, x_0x_1, \dots, x_0x_n)$  où  $x_0 \neq 0$ . On travaille dans l'espace affine euclidien réel usuel à trois dimensions  $\mathcal{E}_3$  ainsi que dans sa clôture projective  $\widehat{\mathcal{E}}_3$ .

Si un point a pour coordonnées  $(X, Y, Z, W)$  dans  $\widehat{\mathcal{E}}$ , avec  $W \neq 0$ , alors ses coordonnées dans  $\mathcal{E}$  sont  $(x, y, z) = \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right)$ . On utilisera cette propriété pour exprimer les équations implicites et paramétriques des cyclides de Dupin et des supercyclides, obtenues dans la fermeture projective  $\widehat{\mathcal{E}}_3$ , dans l'espace affine  $\mathcal{E}$ .

La matrice  $\widehat{\mathcal{M}}$  d'une transformation projective, vérifiant  $\det(\widehat{\mathcal{M}}) \neq 0$ , a été formulée par M. Pratt dans [Pra94] comme :

$$\widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}_{11} & \widehat{\mathcal{M}}_{12} \\ \widehat{\mathcal{M}}_{21} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\widehat{\mathcal{M}}_{11}$  est la matrice d'une transformation affine de  $\mathcal{E}_3$  (rotation, transvection, mise à l'échelle, réflexion ...).  $\widehat{\mathcal{M}}_{12}$  est la matrice d'une translation de  $\mathcal{E}_3$ .  $\widehat{\mathcal{M}}_{21}$  est la matrice de la transformation perspective de  $\widehat{\mathcal{E}}_3$ . La valeur de  $m_{44}$  est généralement de 1 et représente un effet de mise à l'échelle projective.

Pour toute matrice, associée à une transformation projective, il est possible de calculer sa matrice inverse  $\widehat{\mathcal{M}}^{-1}$  dans  $\widehat{\mathcal{E}}$  par :

$$\widehat{\mathcal{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_1 \\ \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_2 \\ \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_3 \\ \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_4 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{M}} \times \widehat{\mathcal{M}}^{-1} = \widehat{\mathcal{M}}^{-1} \times \widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

où pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $\widehat{\mathcal{M}}_i$  est la  $i$ ème ligne de  $\widehat{\mathcal{M}}$ .

Soient deux points  $P(X, Y, Z, W)$  et  $P'(X', Y', Z', W')$  de  $\widehat{\mathcal{E}}_3$  vérifiant  $P' = f(P)$  où  $f$  est la transformation projective associée à  $\mathcal{M}$ . Nous avons alors la relation :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}_1 \\ \widehat{\mathcal{M}}_2 \\ \widehat{\mathcal{M}}_3 \\ \widehat{\mathcal{M}}_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_1 \\ \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_2 \\ \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_3 \\ \widehat{\mathcal{M}}^{-1}_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} \quad (4)$$

Une transformation projective conserve les incidences et les lignes de tangences. Par une application projective non dégénérée, l'image d'un point est un point, d'une courbe est une courbe, d'un plan est un plan, d'une conique est une conique, d'une quadrique est une quadrique [Ped88].

## 2.2 Cyclides de Dupin

### 2.2.1 Equations dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$

Une cyclide de Dupin est l'image d'un tore par une inversion. Nous considérons seulement les cyclides de Dupin de degré 4 (les quartiques). Elles sont caractérisées par trois paramètres réels positifs  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  avec  $a \geq c$ . En posant  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , on utilise les quatre paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $\mu$  pour définir les équations des cyclides de Dupin. Dans un système de coordonnées cartésiennes où le repère est pris en considérant les plans de symétries de la cyclide de Dupin,

son équation paramétrique est :

$$\Gamma(\theta, \psi) = \begin{cases} x(\theta, \psi) &= \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ y(\theta, \psi) &= \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ z(\theta, \psi) &= \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{cases} \quad (5)$$

$\theta \in [0; 2\pi], \psi \in [0; 2\pi]$

Dans ce même repère, la cyclide de Dupin possède deux équations implicites équivalentes [For12, Dar17].

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 = 4(ax - c\mu)^2 + 4b^2y^2 \quad (6)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 = 4(cx - a\mu)^2 - 4b^2z^2 \quad (7)$$

### 2.2.2 Equation dans la clôture projective de l'espace affine $\widehat{\mathcal{E}}_3$

L'équation paramétrique d'une cyclide de Dupin quartique, en coordonnées homogènes, a été donnée par Forsyth [For12] :

$$\Gamma_d(\theta, \psi) = \begin{cases} X_d(\theta, \psi) &= \mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta \\ Y_d(\theta, \psi) &= b \sin \theta (a - \mu \cos \psi) \\ Z_d(\theta, \psi) &= b \sin \psi (c \cos \theta - \mu) \\ W_d(\theta, \psi) &= a - c \cos \theta \cos \psi \end{cases}, \quad \theta \in [0; 2\pi], \psi \in [0; 2\pi] \quad (8)$$

Une cyclide de Dupin quartique peut être définie par deux équations implicites  $F_y(X; Y; Z; W) = 0$  et  $F_z(X; Y; Z; W) = 0$ , où  $F_y$  est donnée par la formule (9) et  $F_z$  est donnée par la formule (10), [Pra94].

$$F_y : (X; Y; Z; W) \mapsto (X^2 + Y^2 + Z^2 + (b^2 - \mu^2)W^2)^2 - 4W^2 \left( (aX - c\mu W)^2 + b^2Y^2 \right) \quad (9)$$

$$F_z : (X; Y; Z; W) \mapsto (X^2 + Y^2 + Z^2 - (\mu^2 + b^2)W^2)^2 - 4W^2 \left( (cX - a\mu W)^2 - b^2Z^2 \right) \quad (10)$$

### 2.3 Supercyclides

Une supercyclide est l'image d'une cyclide de Dupin par une application projective ou affine. Ce nom a été donné par Pratt afin de ne pas les confondre avec les cyclides générales de Casey et Darboux, [Pra94]. Dans cet article, Mike Pratt compare les propriétés des cyclides de Dupin et des supercyclides. Les comparaisons importantes sont :

1. Le degré de la supercyclide est le degré de la cyclide de Dupin originelle, c'est à dire 4 pour cet article.
2. Les cercles qui sont des lignes de courbure des cyclides de Dupin, se transforment en coniques qui ne sont pas obligatoirement des lignes de courbures.
3. Une cyclide de Dupin est construite à base de cercles et d'une inversion. L'image d'une conique par une inversion n'est pas une conique en général donc cette propriété est perdue.

Les supercyclides peuvent avoir une représentation algébrique et l'équation paramétrique biquadratique permet une paramétrisation géométrique simple [Pra97]. Toute supercyclide peut être paramétrisée par deux familles de coniques [Pra99]. les lignes de courbures des supercyclides sont des coniques et le long de chaque ligne de courbure, la supercyclide est tangente à un cône. Il est possible de joindre deux quadriques par une supercyclide non dégénérés si :

1. L'intersection des deux quadriques est une courbe non vide fermée.
2. La courbe d'intersection des deux quadriques s'enroule autour de l'axe des deux quadriques.

Si un plan intersecte une quadrique en une ellipse, et pour toute autre ellipse de la quadrique n'intersectant pas le plan, il existe une supercyclide permettant d'effectuer la jointure entre le plan et la quadrique. Réciproquement, si on peut effectuer une jointure entre un plan et une quadrique à axe à l'aide d'une supercyclide, l'intersection du plan et de la quadrique est une ellipse.

Allen et Dutta ont travaillé sur les jointures de quadriques à axe à l'aide de supercyclides en utilisant les groupes de Lie et l'algèbre de Lie afin de pouvoir conserver la nature des primitives par la transformation affine que l'on va utiliser. La construction proposée nécessite, dans son algorithme, l'utilisation des coordonnées homogènes et une composition de cinq applications  $T_0^{-1} \circ T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1} \circ T_c$  où  $T_c$  est un vissage,  $T_3$  est une transvection ou un biais,  $T_2$  une rotation,  $T_1$  une mise à l'échelle et  $T_0$  une transformation de positionnement. Les transformations considérées dépendent de la nature des quadriques à joindre. Les vecteurs normaux et les angles ne sont pas conservés tandis que les plans tangents le sont [AD97].

### 3 Détermination des équations implicites d'une supercyclide

#### 3.1 Equation paramétrique d'une supercyclide

Une supercyclide est l'image d'une cyclide de Dupin par une transformation projective. L'équation paramétrique projective d'une cyclide de Dupin est donnée par la formule (8). La matrice d'une transformation projective  $\widehat{\mathcal{M}}$  est donnée par la formule (2). Ainsi, l'équation paramétrique projective d'une supercyclide est donnée par :

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_h(\theta, \psi) &= \begin{pmatrix} X(\theta, \psi) \\ Y(\theta, \psi) \\ Z(\theta, \psi) \\ W(\theta, \psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}_1 \\ \widehat{\mathcal{M}}_2 \\ \widehat{\mathcal{M}}_3 \\ \widehat{\mathcal{M}}_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_d(\theta, \psi) \\ Y_d(\theta, \psi) \\ Z_d(\theta, \psi) \\ W_d(\theta, \psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}_1 \\ \widehat{\mathcal{M}}_2 \\ \widehat{\mathcal{M}}_3 \\ \widehat{\mathcal{M}}_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta \\ b \sin \theta (a - \mu \cos \psi) \\ b \sin \psi (c \cos \theta - \mu) \\ a - c \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

#### 3.2 Equations Implicites d'une supercyclide donnée

Il est alors facile de déterminer deux équations implicites d'une supercyclide à partir des deux équations implicites projectives des cyclides de Dupin, formules (9) et (10). Afin de simplifier les calculs, on définit le quadruplet  $(\widehat{X}; \widehat{Y}; \widehat{Z}; \widehat{W})$  par :

$$\begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \\ \widehat{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}}_1^{-1} \\ \widehat{\mathcal{M}}_2^{-1} \\ \widehat{\mathcal{M}}_3^{-1} \\ \widehat{\mathcal{M}}_4^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \quad (12)$$

A partir des deux applications  $F_y$  et  $F_z$ , formule (9) et (10), une supercyclide quartique peut être représentée par deux équations implicites équivalentes  $G_y(X; Y; Z; W) = 0$  et  $G_z(X; Y; Z; W) = 0$ , où  $G_y$  et  $G_z$  sont données par :

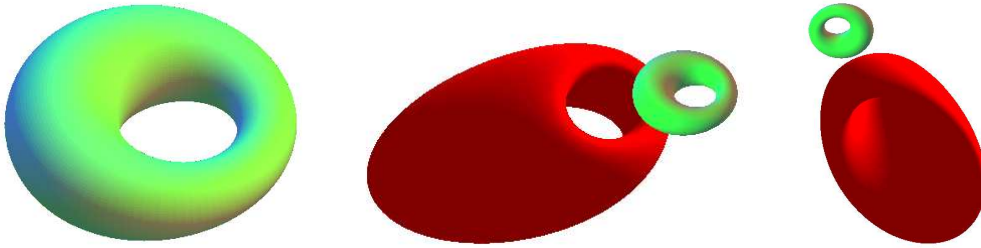
$$G_y : (X; Y; Z; W) \longmapsto F_y(\widehat{X}; \widehat{Y}; \widehat{Z}; \widehat{W}) \quad (13)$$

$$G_z : (X; Y; Z; W) \mapsto F_z (\widehat{X}; \widehat{Y}; \widehat{Z}; \widehat{W}) \quad (14)$$

## 4 Exemples

Dans cette section, on étudie deux exemples de supercyclides. Le premier exemple montre le calcul des équations d'une supercyclide définie comme image d'une cyclide de Dupin par une transformation projective. Le second exemple introduit une nouvelle sous-famille de supercyclides appelé les scaled supercyclides.

### 4.1 Supercyclide projective



Cyclide de Dupin

FIG. 1 – Cyclide de Dupin et son image (une supercyclide) par une transformation projective.

Dans cet exemple, les paramètres de la cyclide de Dupin sont  $a = 7$ ,  $\mu = 3$  et  $c = 1$ . La matrice projective  $\widehat{\mathcal{M}}$  et sa matrice inverse  $\widehat{\mathcal{M}}^{-1}$  sont donnés par :

$$\widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-23}{70} & \frac{46}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{30}{7} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{35} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \quad (15)$$

L'équation projective paramétrique de la supercyclide est définie à partir de cette cyclide de Dupin et de la matrice de transformation  $\widehat{\mathcal{M}}$  en utilisant la formule (11) et on obtient :

$$\begin{pmatrix} -155 - 19 \cos(\theta) \cos(\psi) + 96 \cos(\theta) \\ 8\sqrt{3} \sin(\theta) (7 - 3 \cos(\psi)) \\ -105 + 8\sqrt{3} \sin(\psi) (\cos(\theta) - 3) + 15 \cos(\theta) \cos(\psi) \\ 7 + \frac{2}{5} \sqrt{3} \sin(\psi) (\cos(\theta) - 3) - \cos(\theta) \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (16)$$

La Figure 1 montre la cyclide de Dupin et la supercyclide.

A partir des équations (13) et (14), nous obtenons les deux équations implicites projectives équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{X}{2} - \frac{23Z}{70} + \frac{46W}{7} \right)^2 + \frac{Y^2}{4} + \left( \frac{2Z}{7} + \frac{30W}{7} \right)^2 + 39 \left( \frac{-Z}{35} + \frac{4W}{7} \right)^2 \right)^2 = \\ & 4 \left( \frac{-Z}{35} + \frac{4W}{7} \right)^2 \left( \left( \frac{7X}{2} - \frac{31Z}{14} + \frac{310W}{7} \right)^2 + 12Y^2 \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left( \left( \frac{X}{2} - \frac{23Z}{70} + \frac{46W}{7} \right)^2 + \frac{Y^2}{4} + \left( \frac{2Z}{7} + \frac{30W}{7} \right)^2 - 57 \left( \frac{-Z}{35} + \frac{4W}{7} \right)^2 \right)^2 = 4 \left( \frac{-Z}{35} + \frac{4W}{7} \right)^2 \left( \left( \frac{X}{2} + \frac{19Z}{70} - \frac{38W}{7} \right)^2 - 48 \left( \frac{2Z}{7} + \frac{30W}{7} \right)^2 \right) \quad (18)$$

Ainsi, nous obtenons facilement les deux équations implicites affines équivalentes suivantes :

$$\left( \frac{\left( \frac{x}{2} - \frac{23z}{70} + \frac{46}{7} \right)^2 + 4y^2 + \left( \frac{2z}{7} + \frac{30}{7} \right)^2}{\left( \frac{-z}{35} + \frac{4}{7} \right)^2} + 39 \right)^2 = 4 \left( \frac{\frac{x}{2} - \frac{23z}{70} + \frac{46}{7}}{\frac{-z}{35} + \frac{4}{7}} - 3 \right)^2 + \frac{48y^2}{\left( \frac{-z}{35} + \frac{4}{7} \right)^2} \quad (19)$$

$$\left( \frac{\left( \frac{x}{2} - \frac{23z}{70} + \frac{46}{7} \right)^2 + 4y^2 + \left( \frac{2z}{7} + \frac{30}{7} \right)^2}{\left( \frac{-z}{35} + \frac{4}{7} \right)^2} - 57 \right)^2 = 4 \left( \frac{\frac{x}{2} - \frac{23z}{70} + \frac{46}{7}}{\frac{-z}{35} + \frac{4}{7}} - 21 \right)^2 - \frac{192 \left( \frac{2z}{7} + \frac{30}{7} \right)^2}{\left( \frac{-z}{35} + \frac{4}{7} \right)^2} \quad (20)$$

## 4.2 Scaled supercyclide

Nous proposons ici le calcul des équations implicites et paramétrique d'une sous-famille de supercyclides : les scaled supercyclides. Une scaled supercyclide est l'image d'une cyclide de Dupin par la transformation de mise à l'échelle. Nous montrons le calcul selon les deux aspects projectifs et affines.

### 4.2.1 Aspect projectif

La matrice projective de la transformation de mise à l'échelle  $\widehat{\mathcal{M}}$  et sa matrice inverse  $\widehat{\mathcal{M}}^{-1}$  sont données par :

$$\widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} X_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Y_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

En remplaçant la matrice  $\widehat{\mathcal{M}}$  dans le produit de la formule (11), on obtient l'équation projective paramétrique d'une scaled supercyclide :

$$\Gamma_H(\theta, \psi) = \begin{cases} X_h(\theta, \psi) = X_0(\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta) \\ Y_h(\theta, \psi) = Y_0 b \sin \theta (a - \mu \cos \psi) \\ Z_h(\theta, \psi) = Z_0 b \sin \psi (c \cos \theta - \mu) \\ W_h(\theta, \psi) = a - c \cos \theta \cos \psi \end{cases}, \quad \theta \in [0; 2\pi], \psi \in [0; 2\pi] \quad (22)$$

Il est facile de calculer  $(\widehat{X}; \widehat{Y}; \widehat{Z}; \widehat{W})$ . En effet, on a  $\widehat{X} = \frac{X}{X_0}$ ,  $\widehat{Y} = \frac{Y}{Y_0}$ ,  $\widehat{Z} = \frac{Z}{Z_0}$ ,  $\widehat{W} = W$ . Ainsi, les équations implicites projectives de la scaled supercyclide sont données par  $G_y(X; Y; Z; W) = F_y\left(\frac{X}{X_0}; \frac{Y}{Y_0}; \frac{Z}{Z_0}; W\right) = 0$  et  $G_z(X; Y; Z; W) = F_z\left(\frac{X}{X_0}; \frac{Y}{Y_0}; \frac{Z}{Z_0}; W\right) = 0$ , ce qui donnera les deux équations :

$$\left( \left( \frac{X}{X_0} \right)^2 + \left( \frac{Y}{Y_0} \right)^2 + \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 + (b^2 - \mu^2) W^2 \right)^2 = 4W^2 \left( a \left( \frac{X}{X_0} \right) - c\mu W \right)^2 + 4b^2 \left( \frac{Y}{Y_0} \right)^2 \quad (23)$$

$$\left( \left( \frac{X}{X_0} \right)^2 + \left( \frac{Y}{Y_0} \right)^2 + \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 - (\mu^2 + b^2) W^2 \right)^2 = 4W^2 \left( c \left( \frac{X}{X_0} \right) - a\mu W \right)^2 - 4b^2 \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 \quad (24)$$

#### 4.2.2 Aspect affine

En revenant de la fermeture projective  $\widehat{\mathcal{E}}_3$  dans l'espace affine  $\mathcal{E}_3$ , l'équation affine paramétrique d'une scaled supercylide est donnée par la formule (25). Les équations implicites affines d'une scaled supercylide sont données par les formules (26) et (27).

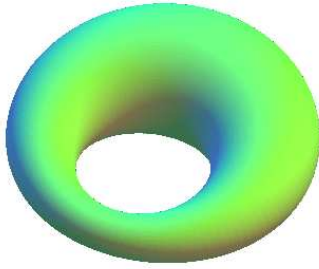
$$\Gamma(\theta, \psi) = \begin{cases} x(\theta, \psi) &= X_0 \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ y(\theta, \psi) &= Y_0 \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ z(\theta, \psi) &= Z_0 \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{cases} \quad (25)$$

$\theta \in [0; 2\pi], \psi \in [0; 2\pi], (X_0; Y_0; Z_0) \in (\mathbb{R}_*^+)^3$

$$\left( \left( \frac{x}{X_0} \right)^2 + \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 + \left( \frac{z}{Z_0} \right)^2 + b^2 - \mu^2 \right)^2 = 4 \left( a \frac{x}{X_0} - c\mu \right)^2 + 4b^2 \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 \quad (26)$$

$$\left( \left( \frac{x}{X_0} \right)^2 + \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 + \left( \frac{z}{Z_0} \right)^2 - b^2 - \mu^2 \right)^2 = 4 \left( c \frac{x}{X_0} - a\mu \right)^2 - 4b^2 \left( \frac{z}{Z_0} \right)^2 \quad (27)$$

#### 4.2.3 Exemple



Cyclide de Dupin seule



Scaled supercylide

FIG. 2 – Cyclide de Dupin cyclide et son image (scaled supercylide) obtenue par une transformation de mise à l'échelle.

Dans cet exemple, les paramètres de la cyclide de Dupin sont  $a = 15$ ,  $\mu = 6$  et  $c = 3$ , Figure 2. Les coefficients de la mise à l'échelle sont  $X_0 = 3$ ,  $Y_0 = 2$  et  $Z_0 = 5$ . L'équation paramétrique est donnée par l'équation (28). Les deux équations implicites sont données par les équations (29) et (30).

$$\Gamma(\theta, \psi) = \begin{cases} x(\theta, \psi) &= \frac{6 - 30 \cos \theta \cos \psi + 12 \cos \theta}{5 - \cos \theta \cos \psi} \\ y(\theta, \psi) &= \frac{6\sqrt{6} \sin \theta (5 - 2 \cos \psi)}{5 - \cos \theta \cos \psi} \\ z(\theta, \psi) &= \frac{6\sqrt{6} \sin \psi (\cos \theta - 2)}{5 - \cos \theta \cos \psi} \end{cases} \quad (28)$$

$\theta \in [0; 2\pi], \psi \in [0; 2\pi], (X_0; Y_0; Z_0) \in (\mathbb{R}_*^+)^3$



$$\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 + 180\right)^2 = 4(5x - 18)^2 + 216y^2 \quad (29)$$

$$\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 - 252\right)^2 = 4(x - 90)^2 - \frac{864z^2}{25} \quad (30)$$

## 5 Conclusion

Nous avons donné une méthode permettant de déterminer les équations implicites d'une supercyclide lorsque l'on connaît l'application projective. Pour cela, nous devons plonger l'espace affine euclidien dans sa clôture projective et l'on obtient les équations projectives. En revenant dans l'espace affine euclidien, nous obtenons les équations implicites affines.

Les prochains travaux consisteront à bien faire le lien entre les supercyclides et les surfaces classiques de modélisation telles que les surfaces de Bézier ou les NURBS. Il s'agira d'étudier comment convertir une supercyclide en carreaux de Bézier ou en surfaces NURBS et vice-versa.

## Références

- [AD97] S. Allen and D. Dutta. Supercyclides and blending. *Computer Aided Geometric Design*, (14) :637–651, 1997.
- [Ber87] M. Berger. *Geometry II*, volume 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1ère édition, 1987.
- [BG92] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF, 2ème édition, avril 1992.
- [Blu90] E. Blutel. Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. *Ann Sci. Ecole Norm. Super.*, 3(7) :155–216, 1890.
- [CDH88] V. Chandru, D. Dutta, and C. M. Hoffmann. On the geometry of dupin cyclides. *CSD-TR-818*, November 1988.
- [Dar73] G. Darboux. *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*. Gauthier-Villars, 1873.
- [Dar17] G. Darboux. *Principe de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1917.
- [Deg82] W. L. F. Degen. Surfaces with a conjugate net of conics in projective space. *Tensor, N.S.*, 39 :167–172, 1982.
- [Deg86] W. L. F. Degen. Die zweifachen blutelschen kegelschnittflächen. *Manuscripta Mathematica*, 55 :9–38, 1986.
- [Deg94] W.L.F. Degen. Generalized cyclides for use in cagd. In Oxford University Press, editor, *The Mathematics of surfaces IV*, number 48, pages 349–363, 1994.
- [Del00] C. Delode. *Géométrie Affine et Euclidienne*. C.A.P.E.S. de Mathématiques. Dunod, Paris, 2000.
- [DMP93] D. Dutta, R. R. Martin, and M. J. Pratt. Cyclides in surface and solid modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1) :53–59, January 1993.
- [Dup22] Ch. P. Dupin. *Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc .* Bachelier, Paris, 1822.
- [For12] A. R. Z. Forsyth. *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1912.
- [GFN02a] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. Conversion de cyclides de dupin en carreaux de bézier rationnels biquadriques. *AFIG 2002*, pages 231–240, december 2002.

- [GFN02b] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. Jointure entre un plan et un cylindre elliptique par des supercyclides. *GTMG 2002*, pages 16–25, mars 2002.
- [GFN02c] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. Jointure  $\mathcal{G}^1$ -continue entre un cône et une sphère. *Revue de CFAO*, 17(3-4) :297–312, 2002.
- [GFN03] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. From dupin cyclides to scaled cyclides. In *Journal of WSCG*, volume 1, pages 165–172, 2003.
- [Max68] J.C. Maxwell. On the cyclide. *Quartely Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9 :111–126, 1868.
- [Mou04] Moutard. *Annales de Mathématiques*. Bulletin de la société Philomatique et compte rendu de l’Accadémie, 1804.
- [NS82] M. Naimark and A. Stern. *Theory of Group Representations*. Springer-Verlag, New-York, 1982.
- [Ped88] D. Pedoe. *Geometry : A Comprehensive Course*. Dover, New-York, 1988.
- [Pra90] M. J. Pratt. Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, (7) :221–242, 1990.
- [Pra94] M. J. Pratt. Dupin cyclides and supercyclides. *Mathematics of Surfaces VI (Proc. of the VI. IMA Conference on the Mathematics of Surfaces, Brunel University, 1994)*.
- [Pra97] M. J. Pratt. Quartic supercyclides i : Basic theory. *Computer Aided Geometric Design*, 14(7) :671–693, 1997.
- [Pra99] M. J. Pratt. Quartic supercyclides ii : Special and degenerate cases. *Computer Aided Geometric Design*, 1999.
- [She98] Ching-Kuang Shene. Blending two cones with dupin cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 15(7) :643–673, 1998.
- [She00] Ching-Kuang Shene. Do blending and offsetting commute for dupin cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 17(9) :891–910, 2000.
- [Tau00] P. Tauvel. *Cours de Géométrie*. Dunod, 1ère edition, Janvier 2000.