

# Représentation analytique des pendants des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau

Lionel GARNIER

LE2i, UMR CNRS 5158, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France  
lgarnier@u-bourgogne.fr

---

## Résumé

*Les Cyclides de Dupin ont été inventées en 1822 par le Mathématicien français Charles Dupin. Ce sont des surfaces algébriques non-sphériques de degré 4 dont les lignes de courbure sont des cercles. Elles sont intéressantes puisqu'elles possèdent une équation paramétrique et deux équations implicites. Une cyclide de Dupin peut être obtenue comme image d'un tore de révolution, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution par une inversion. Un tore de révolution possède, par construction, deux familles de cercles : les méridiens et les parallèles. Sur un tore à collier, il existe une troisième famille de cercles : les cercles de Villarceau. Une inversion transformant un cercle en un cercle ou en une droite, le but de cet article est de déterminer, pour la première fois, une troisième famille de cercles sur les cyclides de Dupin en anneau qui ne soient pas une ligne de courbure de cette cyclide de Dupin. Ainsi, il est possible de créer des triangles non plans, à bords circulaires, remplaçant à terme les triangles plans utilisés dans les maillages.*

*Dupin cyclides are non-spherical algebraic surfaces of degree 4, discovered by the French mathematician Pierre-Charles Dupin at the beginning of the 19th century, with circles as lines of curvature. Moreover, a Dupin cyclide has a parametric equation and two implicit equations. A Dupin cyclide can be defined as the image of a ring torus, a cone of revolution or a cylinder of revolution by an inversion. A torus has two families of circles : meridians and parallels. There is a third family of circles on a ring torus : Villarceau circles. As the image, by an inversion, of a circle is a circle or a straight line, the goal of this article is to determine, for the first time, the third family of circles on a Dupin cyclide which are not lines of curvature. Thus, it is possible to create triangles, which are not contained in a plane, with circular edges replacing, in the future, plane triangles used in meshes.*

---

**Mots clé :** cyclide de Dupin, inversion, cercles de Villarceau, tore de révolution, homothétie, triangles 3D à bords circulaires

## 1. Introduction

La représentation d'un objet complexe est souvent réalisée en utilisant des maillages constitués de triangles inclus dans un plan. Cette méthode propose l'avantage d'offrir beaucoup de liberté dans l'aspect des objets. Cependant les contraintes sont considérables : il faut ajouter, en particulier, des informations topologiques afin d'assurer la cohérence du modèle. Par exemple, si l'on déplace un point d'un objet, les coordonnées des points voisins doivent être

recalculées. La visualisation est coûteuse en temps de calculs si l'on veut que l'objet soit dessiné avec beaucoup de détails, ce qui est nécessaire si la caméra est proche de l'objet. Dans le cas contraire, ces détails ne sont pas utiles et ralentissent l'animation. Il faut alors développer et/ou employer des algorithmes permettant de passer d'un niveau de raffinement à un autre. Ces algorithmes demandent énormément de temps de calculs. De plus, l'objet est mal connu, puisque approximé et il est difficile de faire des calculs (lancer de rayon, intersections...).

C'est pourquoi il serait très intéressant d'avoir un objet constitué de triangles 3D possédant une équation paramétrique et une équation implicite algébrique de degré le moins

élevé possible, en particulier inférieur ou égal à 4. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur les cyclides de Dupin.

En effet, les tores de révolution sont des surfaces pouvant être définies par le produit cartésien de deux cercles et sont des surfaces algébriques de degré 4 [LFA91]. Sur un tore à collier, Y. Villarceau (1813-1883) a défini des cercles, appelés cercles de Villarceau, qui ne sont ni des méridiens ni des parallèles. Ces cercles sont les sections d'un tore par un plan tangent en exactement deux points du tore [BGL01]. Il est aussi possible de définir ces cercles comme intersections de sphères et du tore.

Quant à elles, les cyclides de Dupin, inventées en 1822 par P. Ch. Dupin [Dup22], sont des surfaces non sphériques ayant des lignes de courbure circulaires, pouvant être représentées à la fois par des équations paramétriques et des équations implicites [For12, Gar07, Pra90]. Il est possible de générer une cyclide de Dupin comme image d'un tore de révolution, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution par une inversion [Gar07]. Cette transformation, non affine, transforme un cercle ou une droite en un cercle ou une droite [Bia04, Lad02, Gar07].

Nombre d'auteurs ont travaillé sur les propriétés mathématiques de ces cyclides [Cay73, For12, Max68, Dar17, Dar66, Dar73]. Dans sa thèse, en 1982, R. Martin a ouvert la voie à l'utilisation des cyclides de Dupin en modélisation géométrique [Mar82]. Depuis, beaucoup de travaux ont été réalisés concernant les problèmes de jointures entre deux quadriques naturelles ou entre une quadrique naturelle et un plan à l'aide de cyclides de Dupin [AD97a, AD97b, DMP93, Pra90, Pra95, She97, Gar07]. Afin de faire le lien entre les cyclides de Dupin et les surfaces utilisées de façon classique en CAO et CFAO, des représentations de cyclides de Dupin en carreaux de Bézier rationnels biquadratiques [AD96, Ued95, Pra90, GFN02, FGP05] ou en NURBS [ZS92] ont été proposées.

Le but de cette publication est la construction, sur une cyclide de Dupin en anneau donnée, de cercles qui ne soient ni des méridiens ni des parallèles, et ainsi nous pouvons définir des triangles 3D à bords circulaires. Ces cercles sont les pendants des cercles de Villarceau sur les tores à collier. Bien que d'autres auteurs aient déjà travaillé sur la modélisation de triangles sur une cyclide de Dupin quartique [AD96], à notre connaissance, c'est la première fois que cette troisième famille de cercles est mise en évidence. Dans [AD96], G. Albrecht et W. Degen construisent un triangle de Bézier rationnel de degré 2 sur un cône de révolution puis appliquent une inversion afin que l'image de ce dernier soit une cyclide de Dupin. Par cette même inversion, l'image du triangle de Bézier est un triangle de Bézier rationnel de degré 4.

Le plan de l'article est le suivant : dans un premier temps, des rappels concernant les surfaces de révolution, les tores, l'inversion et les cyclides de Dupin quartiques sont effectués. Dans un deuxième temps, nous construisons un tore, à partir d'une cyclide de Dupin en anneau donnée, à l'aide

d'une inversion choisie de façon adéquate afin de pouvoir déterminer les cercles de Villarceau sur ce tore. Dans un troisième temps, nous prenons les images de ces cercles de Villarceau par l'inversion précédente afin d'obtenir leurs images sur la cyclide de Dupin originelle. Nous utilisons une homothétie si bien qu'un cercle est l'intersection entre une sphère et la cyclide de Dupin. Puis nous donnons les équations de ces cercles en fonction des paramètres de la cyclide de Dupin de départ. Nous finissons en présentant quelques exemples de triangles 3D à bords circulaires.

## 2. Etat de l'art

Dans tout cet article, nous nous plaçons, sauf mention contraire, dans l'espace affine euclidien usuel  $\mathcal{E}_3$  muni du repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

### 2.1. Surfaces de révolution

Une surface  $S$  est une surface de révolution si et seulement si l'on peut trouver une droite  $\Delta$  telle que, pour tout nombre  $\alpha$ , nous ayons  $S = \mathcal{R}_{\Delta, \alpha}(S)$  où  $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$  est la rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\alpha$ . Si  $\{(f(\theta); z(\theta)), \theta \in I\}$  est une courbe  $\gamma$ , alors :

$$S = \left\{ \left( \begin{array}{c} f(\theta) \cos(\psi) \\ f(\theta) \sin(\psi) \\ z(\theta) \end{array} \right), (\psi; \theta) \in [0; 2\pi] \times I \right\} \quad (1)$$

est une surface de révolution, obtenue par rotation d'axe  $(O, \vec{k})$  de la courbe  $\gamma$ . L'intersection de la surface obtenue par un plan contenant l'axe de rotation est **appelée méridienne**. Notons que les autres méridiennes sont les images de la courbe  $\gamma$  par une rotation d'axe  $\Delta$ .

### 2.2. Le tore

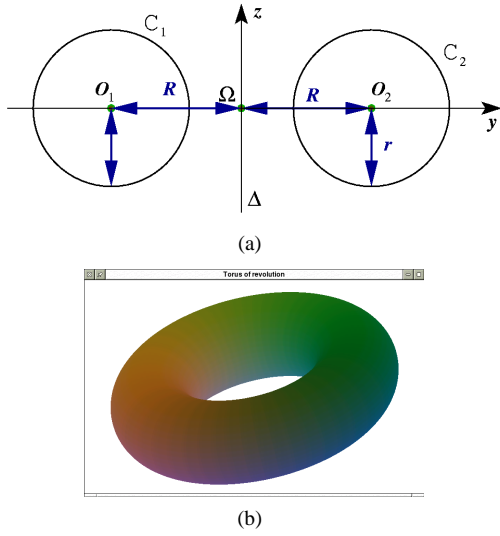
#### 2.2.1. Définition et équations

La méridienne engendrant un tore de révolution, figure 1, est l'union de deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$  et de rayon  $r$ . L'axe  $\Delta$  de la rotation, contenu dans le plan engendré par la méridienne, est la médiatrice du segment  $[O_1O_2]$ . Dans ce plan,  $\Omega$  désigne l'intersection de  $\Delta$  avec le segment  $[O_1O_2]$ . Ces deux droites sont des axes du repère de ce plan. Soit  $R = \Omega O_1$ . Le nombre  $r$  (resp.  $R$ ) est appelé rayon mineur (resp. majeur) du tore.

En prenant une paramétrisation classique du cercle  $C_2$ , figure 1, nous avons  $y(\theta) = (R+r \cos \theta)$  et  $z(\theta) = r \sin \theta$ , ce qui conduit à l'équation suivante du tore :

$$\Gamma_T(\theta, \psi) = \begin{cases} x(\theta, \psi) & = (R+r \cos \theta) \cos \psi \\ y(\theta, \psi) & = (R+r \cos \theta) \sin \psi \\ z(\theta, \psi) & = r \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

où  $\theta \in [0; 2\pi]$ ,  $\psi \in [0; 2\pi]$ . Une équation implicite algébrique



**Figure 1:** Surface de révolution algébrique : le tore. (a) : une méridienne  $C_1 \cup C_2$ . (b) : rendu 3D.

de ce tore [LFA91] est :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (3)$$

Si les cercles  $C_1$  et  $C_2$  sont sécants en deux points, c'est-à-dire que nous avons  $R < r$ , le tore est dit croisé. Si les cercles  $C_1$  et  $C_2$  sont tangents, c'est-à-dire que nous avons  $R = r$ , le tore est dit à collier nul. Si les cercles  $C_1$  et  $C_2$  ne s'intersectent pas, c'est-à-dire que nous avons  $R > r$ , le tore est dit à collier et admet l'équation implicite non algébrique [BGL01] suivante :

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

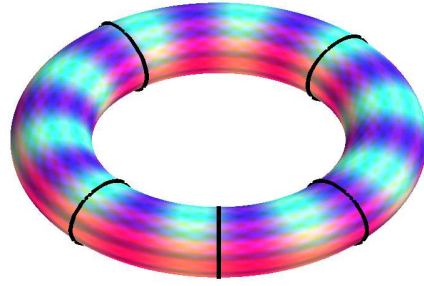
### 2.2.2. Cercles de Villarceau sur un tore à collier

Hormis les cercles obtenus avec l'un des paramètres constants (les cercles méridiens pour  $\psi$  constant, figure 2, et les cercles parallèles pour  $\theta$  constant, figure 3), il existe un et un seul autre type de cercles sur un tore : les cercles de Villarceau (1813-1889) [BGL01]. Un cercle de Villarceau est la section du tore par un plan tangent au tore en exactement deux points.

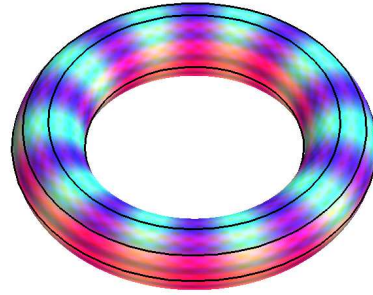
Dans un premier temps, nous allons déterminer deux cercles de Villarceau, les autres s'en déduisent par rotation autour de l'axe de révolution du tore. Pour cela, considérons le plan  $\mathcal{P}$ , tangent au tore à collier en exactement deux points, d'équation :

$$rx + \sqrt{R^2 - r^2} z = 0$$

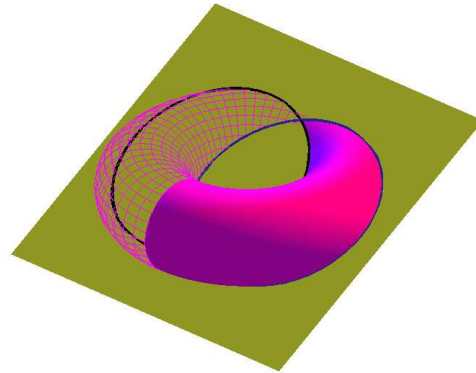
et la section du tore par ce plan  $\mathcal{P}$  est l'union de deux cercles de Villarceau, figure 4.



**Figure 2:** Cercles méridiens sur un tore,  $\psi$  est constant.



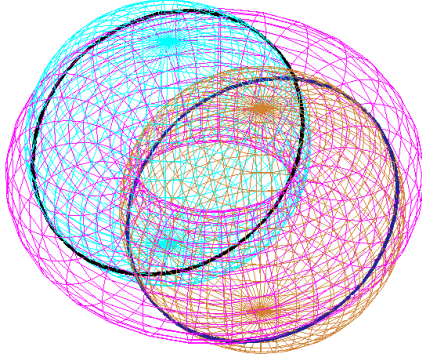
**Figure 3:** Cercles parallèles sur un tore,  $\theta$  est constant.



**Figure 4:** Deux cercles de Villarceau sur un tore à collier, obtenus comme intersection du tore et d'un plan.

Il est possible aussi de déterminer ces deux cercles en utilisant des sphères : à partir de l'équation (4), nous pouvons montrer que l'un (resp. l'autre) de ces deux cercles est l'intersection du tore avec la sphère de centre ayant pour coordonnées  $(0, r, 0)$  (resp.  $(0, -r, 0)$ ) et de rayon  $R$ , figure 5.

Les cercles de Villarceau peuvent donc être obtenus comme une courbe tracée sur une surface et il suffit alors de trouver une relation entre  $\theta$  et  $\psi$  dans la nappe paramétrée (2). Ainsi, l'intersection du tore et du plan  $\mathcal{P}$  conduit



**Figure 5:** Deux cercles de Villarceau sur un tore à collier obtenus comme intersections du tore et de deux sphères.

à :

$$r(R + r \cos \theta) \cos \psi + \sqrt{R^2 - r^2} r \sin \theta = 0$$

et après simplification par  $r$ , nous obtenons :

$$\cos \psi = -\frac{\sqrt{R^2 - r^2} \sin \theta}{(R + r \cos \theta)}$$

et, en prenant  $\varepsilon$  dans  $\{-1; 1\}$ , nous avons :

$$\sin \psi = \varepsilon \sqrt{1 - \cos^2 \psi}$$

c'est-à-dire que nous avons le système :

$$\begin{cases} \cos \psi = -\frac{\sqrt{R^2 - r^2} \sin \theta}{(R + r \cos \theta)} \\ \sin \psi = \frac{\varepsilon (R \cos \theta + r)}{R + r \cos \theta} \end{cases} \quad (5)$$

En remplaçant les valeurs de  $\cos \psi$  et  $\sin \psi$  trouvées dans la formule (5) dans la nappe paramétrée, formule (2), nous obtenons une équation de chacun des deux cercles de Villarceau  $C_\varepsilon$ , figure 6(a) :

$$\gamma_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - r^2} \sin t \\ \varepsilon (R \cos t + r) \\ r \sin t \end{pmatrix} \quad (6)$$

avec  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$  et  $t \in [0; 2\pi]$ . Commençons par rappeler que la notation  $AB$  traduit la distance entre le point  $A$  et le point  $B$  [Gou83].  $\gamma_\varepsilon(t)$  appartient bien à la sphère  $S_\varepsilon$  de centre  $\Omega_\varepsilon(0, \varepsilon r, 0)$  et de rayon  $R$  :

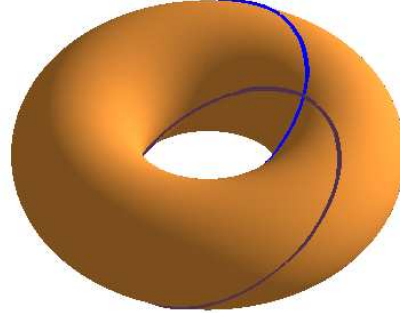
$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon \gamma_\varepsilon(t)^2 &= (R^2 - r^2) \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t \\ &= R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t \\ &= R^2 \end{aligned}$$

A partir des équations paramétriques de deux cercles de Villarceau, formule (6), en utilisant l'expression analytique d'une rotation autour de l'axe  $(O, \vec{k})$  et d'angle  $\theta_0$ , l'équation paramétrique de la famille des cercles de Villarceau

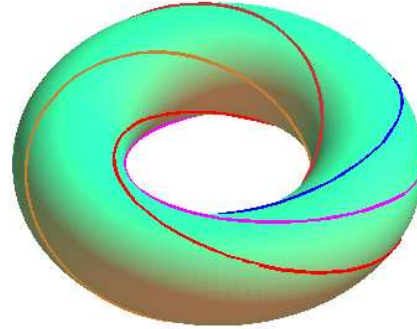
$C_{\varepsilon, \theta_0}$ , image du cercle  $C_\varepsilon$  par la rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\theta_0$ , est donnée par le chemin  $\gamma_{\varepsilon, \theta_0}$ , défini sur  $[0; 2\pi]$  à valeur dans  $\mathcal{E}_3$ , où l'expression de  $\gamma_{\varepsilon, \theta_0}(t)$  est :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - r^2} \sin(t) \cos(\theta_0) - (r + R \cos(t)) \sin(\theta_0) \\ \varepsilon (\sqrt{R^2 - r^2} \sin(t) \sin(\theta_0) + (r + R \cos(t)) \cos(\theta_0)) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

où  $\theta_0$  est un nombre fixé et  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ , figure 6(b).



(a)



(b)

**Figure 6:** Cercles de Villarceau sur un tore à collier. (a) : les deux cercles originels. (b) : quatre cercles obtenus par rotation des cercles originels.

A partir de la formule (7), il est facile d'obtenir le centre d'un cercle de Villarceau  $C_{\varepsilon, \theta_0}$ . Nous avons :

$$\gamma_{\varepsilon, \theta_0}(0) = \begin{pmatrix} -(r + R) \sin(\theta_0) \\ \varepsilon (r + R) \cos(\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma_{\varepsilon, \theta_0}(\pi) = \begin{pmatrix} -(r - R) \sin(\theta_0) \\ \varepsilon (r - R) \cos(\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et son centre  $O_{\varepsilon, \theta_0}$  est le milieu du segment

$[\gamma_{\varepsilon, \theta_0}(0) \gamma_{\varepsilon, \theta_0}(\pi)]$  c'est-à-dire :

$$O_{\varepsilon, \theta_0} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta_0) \\ \varepsilon r \cos(\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

et le rayon est  $R$ . En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} O_{\varepsilon, \theta_0} \gamma_{\varepsilon, \theta_0}(0)^2 &= (-r + R) \sin(\theta_0) + r \sin(\theta_0))^2 \\ &\quad + (\varepsilon(r + R) \cos(\theta_0) - \varepsilon r \cos(\theta_0))^2 \\ &= (-R \sin(\theta_0))^2 + (\varepsilon R \cos(\theta_0))^2 \\ &= R^2 (\sin^2(\theta_0) + \cos^2(\theta_0)) \\ &= R^2 \end{aligned}$$

En fait, un cercle de Villarceau  $C_{\varepsilon, \theta_0}$  est un grand cercle de la sphère  $S_{\varepsilon, \theta_0}$ , image de la sphère  $S_{\varepsilon}$  par la rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\theta_0$ .

### 2.3. Inversion

Une inversion d'un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  de pôle  $\Omega_0$  et de rapport  $k$  non nul est une transformation de  $\mathcal{E} - \{\Omega_0\}$  dans  $\mathcal{E} - \{\Omega_0\}$  qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_0 M'} = \frac{k}{\Omega_0 M^2} \overrightarrow{\Omega_0 M} \quad (9)$$

Notons que le point  $M'$  est l'unique point de la droite  $(\Omega_0 M)$  vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{\Omega_0 M'} \cdot \overrightarrow{\Omega_0 M} = k \quad (10)$$

D'après la définition de la formule (10) et la symétrie du produit scalaire, il est évident qu'une inversion est involutive. Si  $k$  est positif, l'ensemble des points invariants est la sphère de centre  $\Omega_0$  et de rayon  $\sqrt{k}$ .

Le théorème 1, dont la démonstration est disponible dans [Gar07], caractérise l'image d'une sphère<sup>†</sup> ou d'un hyperplan<sup>‡</sup> par une inversion qui est une sphère ou un hyperplan.

#### Théorème 1 :

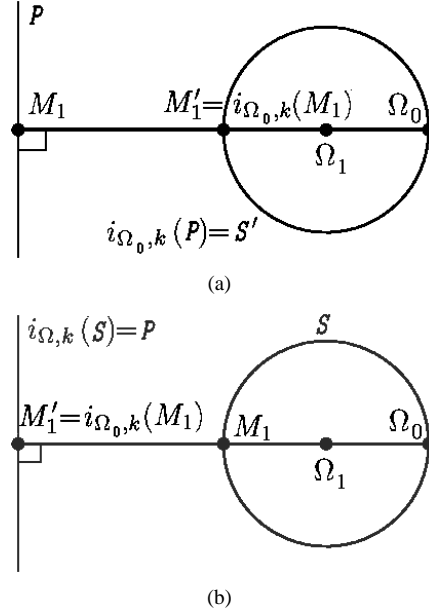
Soit  $i_{\Omega_0, k}$  une inversion d'un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  de pôle  $\Omega_0$  et de rapport  $k$ . Alors :

#### 1. Image d'un hyperplan $\mathbb{P}$ de $\mathcal{E}$ .

- ★ Si  $\Omega_0 \in \mathbb{P}$  alors  $i_{\Omega_0, k}(\mathbb{P})$  est  $\mathbb{P} - \{\Omega_0\}$ .
- ★ Si  $\Omega_0 \notin \mathbb{P}$  alors  $i_{\Omega_0, k}(\mathbb{P})$  est la sphère  $S'$ , privée de  $\Omega_0$ , de diamètre  $[\Omega_0 M'_1]$  où  $M'_1 = i_{\Omega_0, k}(M_1)$  et  $M_1$  est le projeté orthogonal de  $\Omega_0$  sur  $\mathbb{P}$ , figure 7(a).

#### 2. Image d'une sphère $S$ de $\mathcal{E}$ , de centre $\Omega_1$ et de rayon $R$ .

- ★ Si  $\Omega_0 \in S$  alors  $i_{\Omega_0, k}(S)$  est un hyperplan de  $\mathcal{E}$ , de vecteur normal  $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_0}$ , passant par  $M'_1 = i_{\Omega_0, k}(M_1)$ , où  $M_1$  est le second point d'intersection entre  $S$  et la droite  $(\Omega_0 \Omega_1)$ , figure 7(b).
- ★ Si  $\Omega_0 \notin S$  alors  $i_{\Omega_0, k}(S)$  est une sphère, de  $\mathcal{E}$ , homothétique à  $S$  par l'homothétie  $\mathcal{H}_{\Omega_0}$  de centre  $\Omega_0$  et de rapport  $\frac{k}{\Omega_1 \Omega_0^2 - R^2}$ , figures 8(a) et 8(b).



**Figure 7:** Lien entre un plan et une sphère par une inversion. (a) : l'image d'un hyperplan est une sphère. (b) : l'image d'une sphère est un hyperplan.

Dans la figure 8(a), la droite  $(\Omega_0 M)$  recoupe  $S$  en un second point  $N$  et nous avons alors :

$$M' = i_{\Omega_0, k}(M) = \mathcal{H}_{\Omega_0}(N)$$

ce qui fait que l'homothétie et l'inversion ne sont pas égales point par point mais les images de  $S$  sont globalement identiques. Dans la figure 8(b), la droite  $(\Omega_0 M)$  est tangente à  $S$  et dans ce cas, nous avons :

$$M' = i_{\Omega_0, k}(M) = \mathcal{H}_{\Omega_0}(M)$$

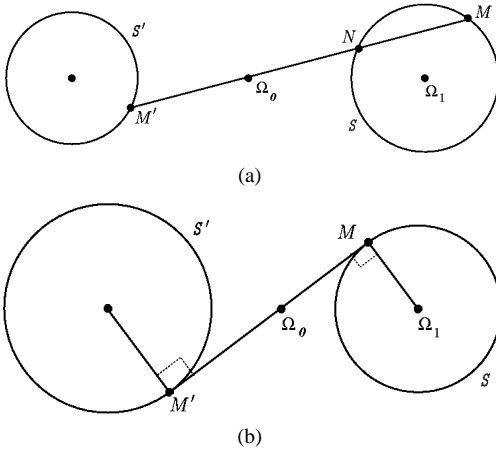
Notons que le nombre  $\Omega_0 \Omega_1^2 - R^2$  est la puissance du point  $\Omega_0$  par rapport à la sphère  $S$ .

### 2.4. Les cyclides de Dupin quartiques

Bien que d'autres définitions des cyclides de Dupin soient possibles [Dup22, Gar07], une cyclide de Dupin quartique peut être définie comme étant l'image d'un tore de révolution, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution

†. Dans le cas du plan, il suffit de remplacer sphère par cercle.

‡. Dans  $\mathcal{E}_3$ , un hyperplan est un plan, dans le cas du plan, un hyperplan est une droite.



**Figure 8:** La sphère  $S'$  est l'image de la sphère  $S$  par une inversion de centre  $\Omega_0$ . (a) :  $(\Omega_0 M)$  coupe la sphère  $S$  en deux points. (b) :  $(\Omega_0 M)$  est tangente à la sphère  $S$ .

par une inversion [Gar07]. Une inversion étant involutive, l'image d'une cyclide de Dupin de degré 4, obtenue comme image d'un tore par une inversion, sera, par cette même inversion, ce même tore.

Une cyclide de Dupin quartique dépend de trois paramètres positifs  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  avec  $a \geq c$ . Pour des raisons de commodités, nous posons  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Une cyclide de Dupin de degré 4 possède une équation paramétrique dont la nappe paramétrée  $\Gamma_d$ , définie sur  $[0; 2\pi]^2$  à valeur dans  $\mathcal{E}_3$ , a pour expression :

$$\Gamma_d(\theta; \psi) = \begin{cases} \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{cases} \quad (11)$$

et deux équations implicites :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 - 4(ax - c\mu)^2 - 4b^2 y^2 = 0 \quad (12)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 - 4(cx - a\mu)^2 + 4b^2 z^2 = 0 \quad (13)$$

résultats obtenus par [For12] et aussi par [Dar17] en explicitant l'enveloppe des sphères définissant une cyclide de Dupin.

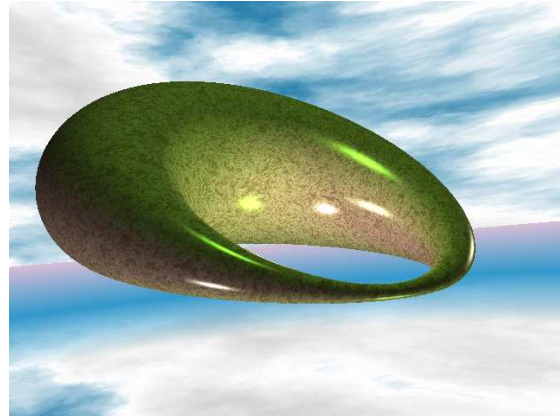
En utilisant des notions de géométrie différentielle et des notions topologiques, il est possible de classer les cyclides de Dupin quartiques, en fonction de la surface de révolution utilisée, en cinq types [Gar07], tableau 1.

Dans la suite de cet article, nous omettrons le terme quartique. La figure 9 montre une cyclide de Dupin en anneau :

Type de la cyclide de Dupin quartique	Surface de révolution initiale
En anneau	Tore à collier
A croissant externe	Tore croisé ou cône
A croissant interne	Tore croisé ou cône
A croissant externe nul	Tore à collier nul ou cylindre
A croissant interne nul	Tore à collier nul ou cylindre

**Table 1:** Les cinq types de cyclides de Dupin quartiques obtenues comme images de surface(s) de révolution par une inversion.

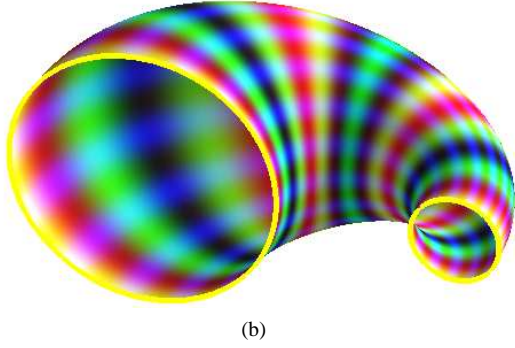
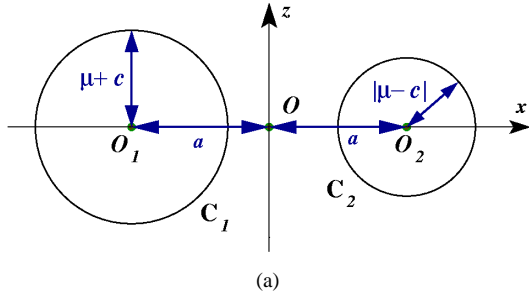
la seule façon d'obtenir ce type est de construire la cyclide de Dupin comme image d'un tore à collier par une inversion [Gar07] et nous avons alors  $0 \leq c < \mu < a$ . Concernant les liens entre le type de la cyclide de Dupin et les valeurs relatives des paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$ , le lecteur peut se reporter à [Gar07]. A partir des formules (3) et (12), il est évident que si  $c$  est nul, la cyclide de Dupin est un tore de révolution de rayon majeur  $a$  et de rayon mineur  $\mu$ .



**Figure 9:** Une cyclide de Dupin en anneau,  $0 \leq c < \mu < a$ .

A partir des formules (12) et (13), il est trivial qu'une cyclide de Dupin admet deux plans de symétrie  $\mathcal{P}_y$  et  $\mathcal{P}_z$  d'équations respectives  $(y = 0)$  et  $(z = 0)$ . La section d'une cyclide de Dupin par l'un de ces deux plans est l'union de deux cercles appelés cercles principaux. La figure 10 montre les deux cercles principaux d'une cyclide de Dupin en anneau obtenus en utilisant le plan  $\mathcal{P}_y$ . Concernant les autres propriétés des cyclides de Dupin, il est possible de se reporter à [Dar17, Dar66, Dar73, Dup22, Pra90, Gar07].

Une cyclide de Dupin est complètement déterminée par son type et deux cercles principaux coplanaires. Ainsi, pour transformer une cyclide de Dupin en tore, il suffit de transformer deux cercles principaux de rayons distincts en deux cercles de même rayon.



**Figure 10:** Coupe d'une cyclide de Dupin en anneau par le plan de symétrie  $\mathcal{P}_y$  d'équation  $(y=0)$ . (a) : les deux cercles principaux. (b) : une demi-cyclide de Dupin de frontière le plan  $\mathcal{P}_y$ .

### 3. Inversion transformant une cyclide de Dupin en un tore.

Le but de ce paragraphe est de construire une inversion telle que l'image d'une cyclide de Dupin en anneau donnée soit un tore à collier. Pour cela, il suffit que les images des deux cercles principaux de la cyclide de Dupin obtenus par le plan  $\mathcal{P}_y$ , figure 10(a), par l'inversion soit une méridienne (i.e. deux cercles de même rayon) du tore de révolution, figure 1(a) et que le centre de cette inversion n'appartienne pas aux cercles principaux de la cyclide de Dupin.

Nous allons identifier  $\mathcal{P}_y$  au plan complexe afin de trouver les centres d'inversion  $\Omega_i$  possibles, puis nous définirons une inversion de  $\mathcal{E}_3 - \{\Omega_i\}$  dans lui-même.

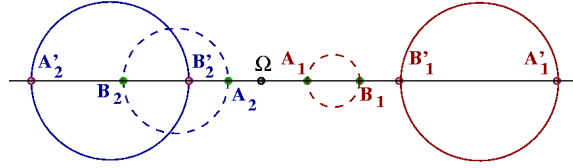
#### 3.1. Inversion dans le plan complexe.

Rappelons que la notation  $M(z)$  signifie que le nombre complexe  $z$  est l'abscisse du point  $M$  dans le plan complexe [Gou83]. Soit  $f$  une inversion du plan complexe de pôle  $\Omega(\omega)$  et de rapport  $k$ . Soit  $M'(z')$  l'image de  $M(z)$  par l'inversion  $f$ . L'expression de  $z'$  est donnée par :

$$z' = f(z) = \omega + \frac{k}{z - \omega} \quad (14)$$

Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux cercles de diamètres respectifs  $[A_1 B_1]$  et  $[A_2 B_2]$  et tels que ces quatre points soient alignés sur la droite réelle du plan complexe, figure 11. Notons  $a_1, b_1, a_2$  et  $b_2$  les abscisses respectives des points  $A_1, B_1, A_2$  et  $B_2$ .

Nous cherchons à déterminer l'inversion  $f$ , de pôle  $\Omega(\omega)$  avec  $\omega$  réel, telle que les images des cercles  $C_1$  et  $C_2$  soient deux cercles de même rayon, figure 11. En général, l'image d'un diamètre par une inversion n'est pas un diamètre sauf si les extrémités du diamètre sont alignés avec le pôle de l'inversion  $\Omega$ .



**Figure 11:** Cercles de même rayon obtenus comme images de deux cercles par une inversion.

Les abscisses des points  $A'_1, B'_1, A'_2$  et  $B'_2$  sont respectivement  $f(a_1), f(b_1), f(a_2)$  et  $f(b_2)$ . Les deux cercles  $f(C_1)$  et  $f(C_2)$  ont même rayon si et seulement si :

$$|f(b_1) - f(a_1)| = |f(b_2) - f(a_2)|$$

qui se traduit par :

$$\left| \omega + \frac{k}{b_1 - \omega} - \omega - \frac{k}{a_1 - \omega} \right| = \left| \omega + \frac{k}{b_2 - \omega} - \omega - \frac{k}{a_2 - \omega} \right| \quad (15)$$

et qui se simplifie en la relation :

$$\left| \frac{1}{b_1 - \omega} - \frac{1}{a_1 - \omega} \right| = \left| \frac{1}{b_2 - \omega} - \frac{1}{a_2 - \omega} \right| \quad (16)$$

Dans le cas où le nombre  $(b_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)$  est positif ou nul, nous posons  $\delta_1 = \sqrt{(b_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)}$ , sinon  $\delta_1$  est l'une des racines carrées complexes de  $(b_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)$ . Si  $-(a_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)$  est positif, nous posons  $\delta_2 = \sqrt{-(a_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)}$ , sinon  $\delta_2$  est l'une des racines carrées complexes de  $-(a_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)$ . L'équation (16) admet quatre solutions données par :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{b_1 b_2 - a_2 a_1 + \delta_1}{b_2 - a_2 + b_1 - a_1} \\ \omega_2 &= \frac{b_1 b_2 - a_2 a_1 - \delta_1}{b_2 - a_2 + b_1 - a_1} \\ \omega_3 &= \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1 + \delta_2}{b_1 - a_1 + a_2 - b_2} \\ \omega_4 &= \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1 - \delta_2}{b_1 - a_1 + a_2 - b_2} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3.2. Simplification du calcul du pôle lors de l'utilisation d'une cyclide de Dupin en anneau

Dans le cas où  $C_1$  et  $C_2$  sont les deux cercles principaux d'une cyclide de Dupin en anneau de paramètres strictement positifs  $a$ ,  $c$  et  $\mu$ , nous posons  $A_1(a - \mu + c; 0; 0)$ ,  $B_1(a + \mu - c; 0; 0)$ ,  $A_2(-a + \mu + c; 0; 0)$ ,  $B_2(-a - \mu - c; 0; 0)$ , figure 11. Comme la cyclide de Dupin est en anneau, nous avons  $0 < c < \mu < a$  donc  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont complexes,  $\omega_3$  et  $\omega_4$  sont réels et nous posons  $\delta_1 = \alpha_1 + i\beta_1$  tel que  $\delta_1^2 = (a^2 - \mu^2)(c^2 - \mu^2)$ . Les abscisses des pôles possibles, formule (17), se simplifient :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{ac - \delta_1}{\mu} & \omega_2 &= \frac{ac + \delta_1}{\mu} \\ \omega_3 &= \frac{a\mu + b\sqrt{\mu^2 - c^2}}{c} & \omega_4 &= \frac{a\mu - b\sqrt{\mu^2 - c^2}}{c} \end{aligned} \quad (18)$$

Soit  $\omega$  l'une des racines réelles. Pour une cyclide de Dupin en anneau, le pôle  $\Omega(\omega)$  de l'inversion n'est pas confondu avec l'un des points  $A_1, B_1, A_2$  ou  $B_2$  ce qui implique que les images des cercles principaux de la cyclide de Dupin sont bien deux cercles, théorème 1.

### 3.3. Tore obtenu comme image d'une cyclide de Dupin par une inversion

Soit  $\Omega_0(\omega; 0; 0)$  le pôle de l'inversion  $i_{\Omega_0, k}$  de  $\mathcal{E}_3 - \{\Omega_0\}$  dans  $\mathcal{E}_3 - \{\Omega_0\}$  et de rapport  $k$  telle que sa restriction à  $\mathcal{P}_y$ , considéré comme plan complexe, soit  $f$ . Soit  $M(x; y; z)$  un point de  $\mathcal{E}_3 - \{\Omega_0\}$  et  $M'(x'; y'; z')$  l'image de  $M$  par  $i_{\Omega_0, k}$ . L'expression analytique de  $i_{\Omega_0, k}$  est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega + \frac{k(x - \omega)}{(x - \omega)^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{ky}{(x - \omega)^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{kz}{(x - \omega)^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Il reste à déterminer le rayon mineur  $r$  et rayon majeur  $R$  du tore. Nous avons  $r = \frac{B_1' A_1'}{2}$  et  $R = \frac{1}{2} B_1' B_2' + r$ , figure 11. Le centre du tore est le point  $\Omega$  milieu du segment  $[B_1' B_2']$  et a pour coordonnées  $(x_0; 0; 0)$  avec  $x_0 = \frac{x_{B_1'} + x_{B_2'}}{2}$ . La nappe paramétrée de la formule (2) est exprimée dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et les cercles de Villarceau sur ce tore sont, dans ce même repère, donnés par la formule (7).

### 4. Pendants des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau

Les pendants des cercles de Villarceau sur la cyclide de Dupin en anneau sont les images des cercles de Villarceau

sur le tore à coller par l'inversion qui permet de construire ce tore à partir de la cyclide de Dupin originelle.

Il est possible de déterminer ces cercles sur la cyclide de Dupin comme intersection de cette dernière avec une sphère. En effet, considérons  $C_v$  un des cercles de Villarceau du tore obtenu par intersection du tore avec la sphère  $S$  de centre  $\Omega_1$ . Soit  $S'$  la sphère obtenue comme image de la sphère  $S$  par l'homothétie de centre  $\Omega_0$  et de rapport  $k_1 = \frac{1}{\Omega_0 \Omega_1 - R^2}$ , théorème 1. Le cercle  $C'_v$  est l'intersection entre la sphère  $S'$  et la cyclide de Dupin, figures 13 et 14.

### 4.1. Un résultat formel

Nous rappelons que nous partons d'une cyclide de Dupin en anneau. Dans ce paragraphe, nous donnons les valeurs du tore obtenu à partir d'une des inversions possibles. Le centre de l'inversion est  $\Omega_3(\omega_3; 0; 0)$  avec :

$$\omega_3 = \frac{a\mu + b\sqrt{\mu^2 - c^2}}{c} \quad (20)$$

Pour des raisons de commodités, posons :

$$num_1 = -b^2\mu^2 + b^2c^2 + kc^2$$

$$num_2 = b\sqrt{\mu^2 - c^2}(-2a\mu + ac + \mu c - c^2)$$

$$num_3 = b\sqrt{\mu^2 - c^2}(-2a\mu + ac - \mu c + c^2)$$

$$num_4 = b^2\mu^2 - b^2c^2 - kc^2$$

$$num_5 = b\sqrt{\mu^2 - c^2}(2a\mu + ac + \mu c + c^2)$$

$$num_6 = b\sqrt{\mu^2 - c^2}(2a\mu + ac - \mu c - c^2)$$

Ainsi, les nombres  $f(a_1)$ ,  $f(b_1)$ ,  $f(a_2)$  et  $f(b_2)$  sont les affixes respectives des points  $f(A_1)$ ,  $f(B_1)$ ,  $f(A_2)$  et  $f(B_2)$  et sont donnés par :

$$\begin{aligned} f(a_1) &= \frac{a\mu(-\mu + c)(a - c) + num_1 + num_2}{c(ac + \mu c - c^2 - a\mu - b\sqrt{\mu^2 - c^2})} \\ f(b_1) &= \frac{a\mu(-\mu + c)(a + c) + num_1 + num_3}{c(ac - \mu c + c^2 - a\mu - b\sqrt{\mu^2 - c^2})} \\ f(a_2) &= \frac{a\mu(\mu + c)(a + c) + num_4 + num_5}{c(ac + \mu c + c^2 + a\mu + b\sqrt{\mu^2 - c^2})} \\ f(b_2) &= \frac{a\mu(\mu + c)(a - c) + num_4 + num_6}{c(ac - \mu c - c^2 + a\mu + b\sqrt{\mu^2 - c^2})} \end{aligned} \quad (21)$$

Concernant les paramètres du tore, lorsque  $k > 0$  et après quelques calculs et en posant :

$$den = (a - c)(\mu - c) + b\sqrt{\mu^2 - c^2} \quad (22)$$



le rayon mineur est :

$$r = \frac{kc^2(\mu - c)}{\left((a + c)(\mu - c) + b\sqrt{\mu^2 - c^2}\right) \times den} \quad (23)$$

le rayon majeur est :

$$R = \frac{kc^2(a - c)}{\left((a - c)(\mu + c) + b\sqrt{\mu^2 - c^2}\right) \times den} \quad (24)$$

et son centre est :

$$\Omega = \left(\frac{f(b_1) + f(b_2)}{2}; 0; 0\right) \quad (25)$$

et, après calculs, l'abscisse  $x_\Omega$  de  $\Omega$  est donnée par :

$$\omega - \frac{kb^2(\omega - c)}{\left((a - c)(\mu + \omega) - b^2\right)\left((a + c)(\omega - c) + b^2\right)} \quad (26)$$

Pour déterminer les équations des pendants des cercles de Villarceau sur la cyclide de Dupin en anneau, il est pertinent d'introduire les fonctions numériques  $den_1$  et  $den_2$  où l'expression de  $den_1(t)$  est :

$$\left(x_\Omega - \sqrt{R^2 - r^2} \cos \theta_0 \sin t - \varepsilon(r + R \cos t) \sin \theta_0 - \omega\right)^2$$

et celle de  $den_2(t)$  est :

$$\left(-\sqrt{R^2 - r^2} \sin \theta_0 \sin t + \varepsilon(r + R \cos t) \cos \theta_0\right)^2$$

où  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$  et  $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ . En ce qui concerne  $\varepsilon$ , comme dans la section 2.2.2, nous avons deux cercles pour chaque section plane de la cyclide de Dupin. Quant à lui,  $\theta_0$  traduit un angle de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{k})$ . Il est maintenant possible de définir les équations de cette troisième famille de cercles sur une cyclide de Dupin en anneau, définies par le chemin  $\gamma_{\theta_0, \varepsilon}^{CD4}$  dont une expression de  $\gamma_{\theta_0, \varepsilon}^{CD4}(t)$  est :

$$\left( \begin{array}{c} \omega + \frac{k(x_\Omega - \omega + num_x(t))}{den_1(t) + den_2(t) + r^2 \sin^2 t} \\ \frac{k(-\sqrt{R^2 - r^2} \sin \theta_0 \sin t + \varepsilon(r + R \cos t) \cos \theta_0)}{den_1(t) + den_2(t) + r^2 \sin^2 t} \\ \frac{kr \sin t}{den_1(t) + den_2(t) + r^2 \sin^2 t} \end{array} \right) \quad (27)$$

où la fonction numérique  $num_x$  est définie par :

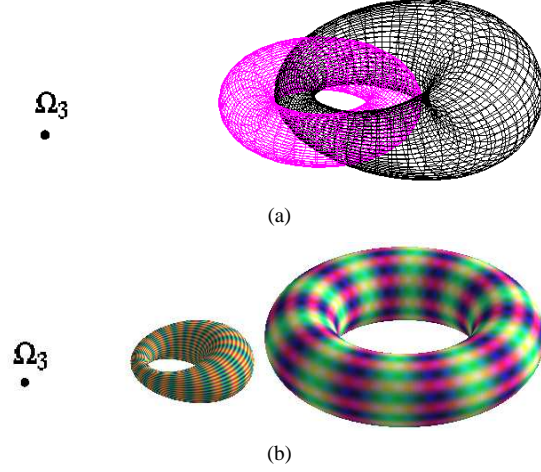
$$t \mapsto -\sqrt{R^2 - r^2} \cos \theta_0 \sin t - \varepsilon(r + R \cos t) \sin \theta_0 \quad (28)$$

## 4.2. Résultats numériques

Dans cette section, nous montrons des exemples des pendants de cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau puis, nous construisons des triangles rectangles non plans sur des cyclides de Dupin en anneau.

### 4.2.1. Pendants de cercles de Villarceau

La figure 12(a) (resp. 12(b)) montre une cyclide de Dupin et un tore obtenu comme image de la cyclide de Dupin par une inversion de centre  $\Omega_3(20 + 12\sqrt{2}; 0; 0)$  et de rapport  $k = 1000$  (resp.  $k = 3000$ ). Les paramètres de la cyclide de Dupin sont  $a = 10$ ,  $\mu = 4$  et  $c = 2$ . Les rayons et le centre du tore sont donnés dans le tableau 2.



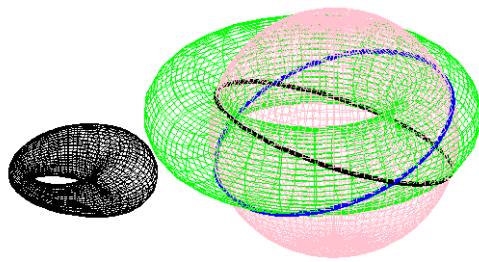
**Figure 12:** Transformation d'une cyclide de Dupin en tore par une inversion de centre  $\Omega_3(20 + 12\sqrt{2}; 0; 0)$  et de rapport  $k$ . (a) :  $k = 1000$ . (b) :  $k = 3000$ .

	Figure 12(a)	Figure 12(b)
$r$	$\frac{1000 - 625\sqrt{2}}{42} \simeq 2,76$	$\frac{1000 - 625\sqrt{2}}{14} \simeq 8,29$
$R$	$\frac{-1250 + 1000\sqrt{2}}{21} \simeq 7,82$	$\frac{-1250 + 1000\sqrt{2}}{7} \simeq 23,46$
$\Omega$	$\begin{pmatrix} 20 - \frac{53\sqrt{2}}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 - \frac{101\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

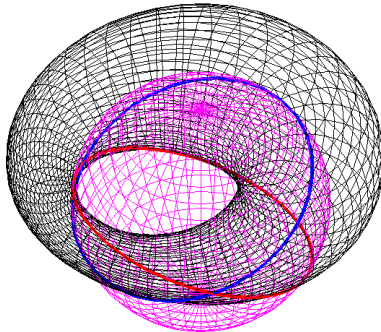
**Table 2:** Paramètres des tores de la figure 12.

La figure 13 montre les pendants des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau. La figure 13 (a) montre la cyclide de Dupin, deux cercles de Villarceau sur le tore de la figure 12(b), obtenus comme intersection d'une sphère avec le tore.

La figure 14 montre trois couples d'images de cercles de



(a)



(b)

**Figure 13:** Cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin. (a) : la cyclide de Dupin, deux cercles de Villarceau sur le tore, obtenus comme intersection d'une sphère avec le tore. (b) : Les pendants des cercles de Villarceau correspondants, obtenus comme intersection entre la cyclide de Dupin et une sphère.

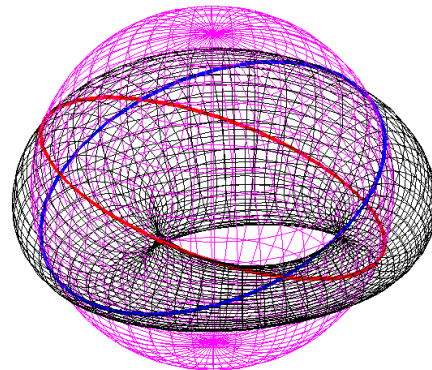
Villarceau sur une cyclide de Dupin. Les sphères sur le tore sont obtenues avec les valeurs respectives de  $\theta_0 : \frac{\pi}{2}, \pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

La figure 15 montre douze cercles sur une cyclide de Dupin en anneau qui ne sont ni des méridiens ni des parallèles, ces cercles sont les pendants des cercles de Villarceau sur un tore à collier.

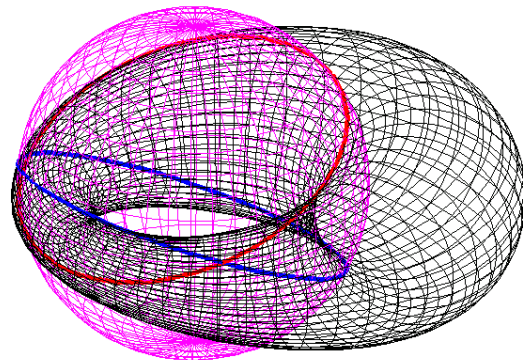
Naturellement, lorsque le seul but est l'obtention des pendants des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau, afin de simplifier les calculs des rayons du tore (qui ne nous intéressent donc pas), nous prenons comme rapport  $k$  de l'inversion le nombre  $den$ , formule (22).

#### 4.2.2. Triangles rectangles non plans sur une cyclide de Dupin en anneau

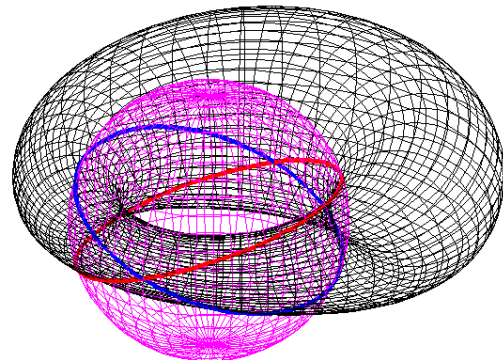
En prenant des arcs de cercles dans chaque famille (méridiens, parallèles, pendants des cercles de Villarceau), il est possible de construire des triangles non plans sur une cyclide de Dupin en anneau. Comme les parallèles et les méridiens sont des lignes de courbure de la cyclide de Dupin, ceux-ci



(a)



(b)



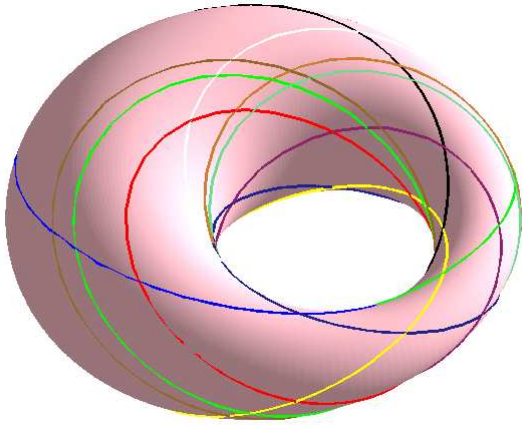
(c)

**Figure 14:** Couples de cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin. (a) :  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . (b) :  $\theta_0 = \pi$ . (c) :  $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ .

sont perpendiculaires<sup>§</sup> et les triangles ainsi construits sont rectangles.

La figure 16 montre deux triangles 3D à bords circulaires

<sup>§</sup>. En un point d'intersection de deux cercles, les tangentes à chaque courbe sont perpendiculaires.



**Figure 15:** Douze cercles sur une cyclide de Dupin en anneau obtenus comme pendants des cercles de Villarceau sur un tore à collier.

construits sur un tore à collier et sur une cyclide de Dupin en anneau. Dans les deux cas, nous avons  $\theta_0 = 0$ .

Les paramètres du tore sont  $r = 4$  et  $R = 8$  et les bornes définissant l'arc de cercle de Villarceau sont  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{2}$ . Les paramètres de la cyclide de Dupin sont les mêmes qu'au début de ce paragraphe. Les bornes de visualisation du troisième arc de cercle sont  $t_0 = -\frac{\pi}{2}$  et  $t_1 = 0$ .

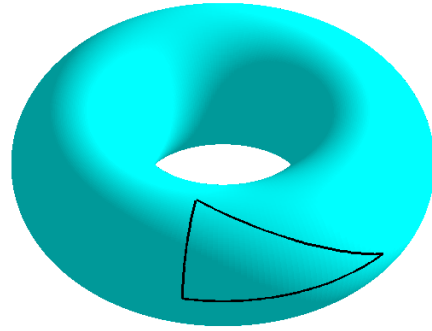
En reprenant la même cyclide de Dupin en anneau, la figure 17(a) (resp. 17(b)) montre un triangle 3D à bords circulaires, obtenu avec les valeurs  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  (resp.  $\theta_0 = -\frac{\pi}{3}$ ),  $t_0 = 0$  (resp.  $t_0 = -\frac{\pi}{3}$ ) et  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  (resp.  $t_1 = 0$ ).

Les figures 18 et 19 montrent chacune un triangle 3D à bords circulaires, obtenu avec les valeurs  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{8}$  et  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  sur une cyclide de Dupin en anneau de paramètres  $a = 11$ ,  $\mu = 8$  et  $c = 7$ . Ainsi, selon les paramètres de la cyclide de Dupin et les lignes de courbure considérées, les formes de ces triangles 3D peuvent être très variées.

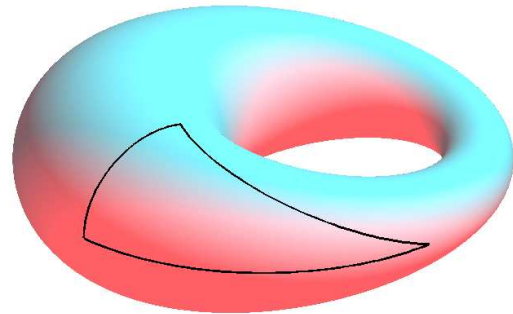
## 5. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons développé une méthode permettant de déterminer des cercles sur une cyclide de Dupin en anneau donnée qui ne soient ni des méridiens ni des parallèles. Ces cercles qui ne sont pas des lignes de courbure de la cyclide de Dupin sont les pendants des cercles de Villarceau sur un tore à collier construit comme inverse de la cyclide de Dupin donnée.

En prenant un cercle de chaque famille, nous avons construit un triangle rectangle non plan à bords circulaires. Les prochaines étapes de ce travail seront la détermination des paramètres d'une cyclide de Dupin à partir d'un triangle 3D à bords circulaires. Ensuite, nous comptons réa-



(a)



(b)

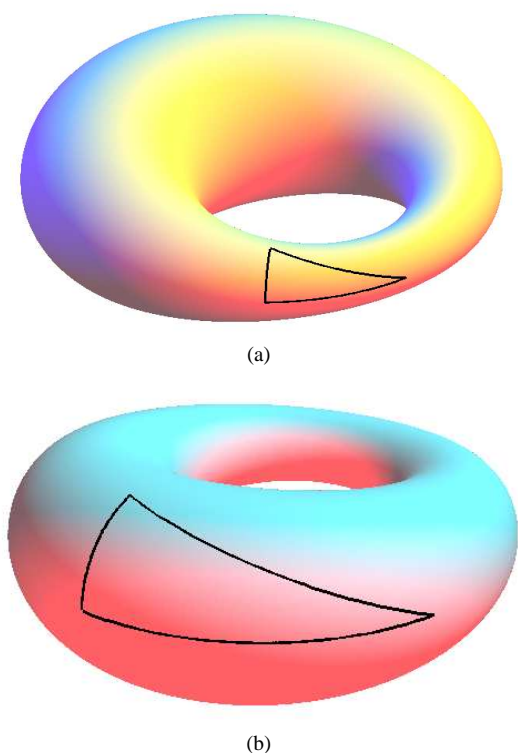
**Figure 16:** Deux triangles 3D à bords circulaires avec  $\theta_0 = 0$ . (a) : sur un tore à collier. (b) : sur une cyclide de Dupin en anneau.

liser des jointures de type  $G^1$  entre de tels triangles et modéliser des objets complexes en utilisant des patchworks de triangles rectangles non plans à bords circulaires. En s'appuyant sur des supercyclides elliptiques, une généralisation aux triangles 3D à bords elliptiques est envisagée dans un avenir plus lointain. Cette évolution permettra en plus de s'affranchir de la condition de deux cercles de bordure perpendiculaires.

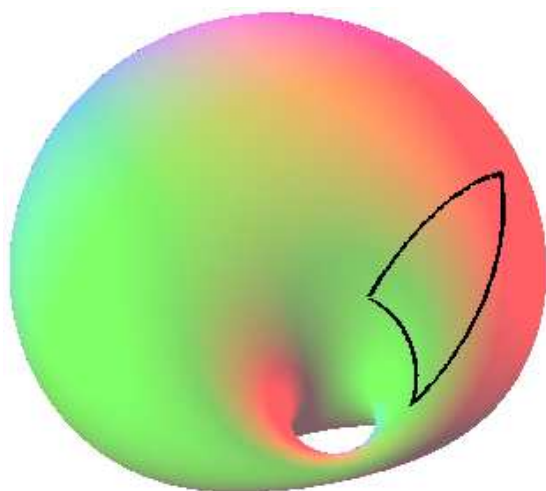
## 6. Remerciements

Je remercie tout d'abord Dominique MICHELUCCI, Professeur au Le2i de l'Université de Bourgogne, qui m'a posé la question du devenir des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin. Sans lui, ce travail n'aurait pas vu le jour. Je remercie aussi Gudrun ALBRECHT, Professeur au LAMAV de l'Université de Valenciennes qui m'a soufflé l'idée de l'utilisation future de ces triangles en modélisation géométrique.

L'auteur remercie aussi les relecteurs de cet article qui, grâce à leurs conseils, ont permis d'augmenter la lisibilité de cet article.



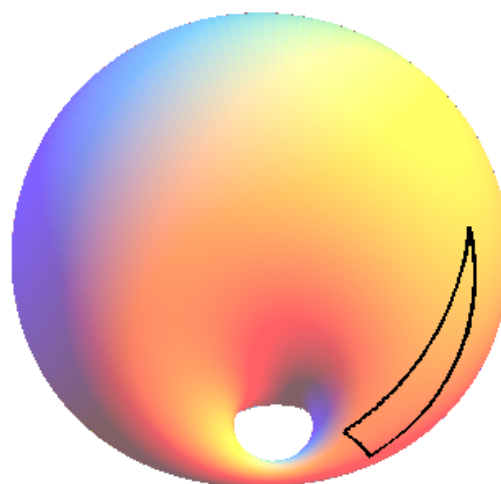
**Figure 17:** Deux triangles 3D à bords circulaires sur une cyclide de Dupin en anneau. (a)  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . (b) :  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ .



**Figure 18:** Un triangle 3D à bords circulaires sur une cyclide de Dupin en anneau,  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

#### Références

[AD96] ALBRECHT G., DEGEN W. : Construction of Bézier rectangles and triangles on the symmetric Dupin horn



**Figure 19:** Un triangle 3D à bords circulaires sur une cyclide de Dupin en anneau,  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

cyclide by means of inversion. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 4 (1996), 349–375.

[AD97a] ALLEN S., DUTTA D. : Cyclides in pure blending I. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 1 (1997), 51–75. ISSN 0167-8396.

[AD97b] ALLEN S., DUTTA D. : Cyclides in pure blending II. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 1 (1997), 77–102. ISSN 0167-8396.

[BGL01] BOUVIER A., GEORGE M., LIONNAIS F. L. : *Dictionnaire des Mathématiques*, 1ère ed. Quadrige, PUF, 2001.

[Bia04] BIASI J. D. : *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation interne*, 3 ed. Collection CAPES / AGREG. Ellipse, janvier 2004. ISBN :2-7298-1855-3.

[Cay73] CAYLEY A. : On the cyclide. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 12 (1873), 148–165.

[Dar66] DARBOUX G. : *Thèse à la faculté des sciences de Paris*. Annales scientifiques de l'école normale, 1866.

[Dar73] DARBOUX G. : *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*. Gauthier-Villars, 1873.

[Dar17] DARBOUX G. : *Principes de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1917.

[DMP93] DUTTA D., MARTIN R. R., PRATT M. J. : Cyclides in surface and solid modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*. Vol. 13, Num. 1 (janvier 1993), 53–59.

[Dup22] DUPIN C. P. : *Application de Géométrie et de Méchanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc*. Bachelier, Paris, 1822.

- [FGP05] FOUFOU S., GARNIER L., PRATT M. : Conversion of Dupin Cyclide Patches into Rational Biquadratic Bézier Form. In *Proceedings of the 11th Conference on the Mathematics of Surfaces* (September 2005), Martin R., Bez H., Sabin M., (Eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 201–218. ISBN : 3-540-28225.
- [For12] FORSYTH A. R. : *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1912.
- [Gar07] GARNIER L. : *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007.
- [GFN02] GARNIER L., FOUFOU S., NEVEU M. : Conversion de cyclides de Dupin en carreaux de Bézier rationnels biquadratiques. In *Actes des 15<sup>èmes</sup> journées AFIG* (Lyon, France, December 2002), pp. 231–240.
- [Gou83] GOURION M. : *Mathématiques, Terminales C et E, tome 2*. Fernand Nathan, 1983.
- [Lad02] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.
- [LFA91] LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J. M. : *Cours de Mathématiques : variétés, courbes et surfaces*, 2ème ed. Dunod, Octobre 1991.
- [Mar82] MARTIN R. R. : *Principal patches for computational geometry*. PhD thesis, Engineering Department, Cambridge University, 1982.
- [Max68] MAXWELL J. C. : On the cyclide. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1868), 111–126.
- [Pra90] PRATT M. J. : Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design. Vol. 7*, Num. 1-4 (1990), 221–242.
- [Pra95] PRATT M. J. : Cyclides in computer aided geometric design II. *Computer Aided Geometric Design. Vol. 12*, Num. 2 (1995), 131–152.
- [She97] SHENE C. K. : Blending with affine and projective Dupin cyclides. *Computer Aided Geometric Design. Vol. 5*, Num. 1–2 (1997), 121–152.
- [Ued95] UEDA K. : Normalized Cyclide Bézier Patches. In *Mathematical Methods for Curves and Surfaces* (Nashville, USA, 1995), Vanderbilt University Press, pp. 507–516.
- [ZS92] ZHOU X., STRASSER W. : A NURBS approach to cyclides. *Computers In Industry. Vol. 19*, Num. 2 (1992), 165–174.